Proef POL

2020 Analyse - Ruimtemeetkunde - Rijen en reeksen - Complexe getallen Reeks A

5 vragen - 4 uren

1. De tekeningen die bij sommige vragen zijn opgenomen dienen enkel ter illustratie. De figuren zijn niet op schaal getekend. Probeer dus niet na te meten.
2. Handboeken en rekentoestellen zijn niet toegestaan. Het gebruik van een lat, een gradenboog, een geodriehoek en een passer is wel toegelaten.
3. Laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = {}^e\log 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (4 punten)

(a) (2 punten) Bepaal $k \in \mathbb{R}$, zodat voor elke complex getal $z = a + b\mathrm{i}$ met $b = -2a$ geldt:

$$|z - k + 7\mathrm{i}| = |z - 2 + 9\mathrm{i}|$$

(b) (2 punten) $-\mathrm{i}$ is een wortel van $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$. Zoek de andere wortels.

Vraag 2 (4 punten) Een patiënt neemt de eerste dag 10 mg van een geneesmiddel en daarna elke dag 5 mg. In de loop van de dag wordt in het lichaam 40% van het geneesmiddel afgebroken. We kunnen de hoeveelheden van het geneesmiddel die zich in het lichaam bevinden onmiddellijk na de inname op de 1ste, 2de, 3de, ... dag voorstellen door een rij $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

(a) (1 punt) Schrijf een recursief voorschrift voor deze rij.

(b) (1 punt) Bewijs door volledige inductie dat deze rij naar boven begrensd is.

(c) (1 punt) Bewijs dat de rij stijgend is.

(d) (1 punt) Bepaal de limiet van de rij door gebruik te maken van de rekenregels van limieten.

Vraag 3 (4 punten) Gegeven: $f(x) = x^3 + px - 1$.

(a) (2 punten) Aan welke voorwaarde moet $p \in \mathbb{R}$ voldoen opdat de functie geen extremum zou hebben?

(b) (2 punten) Aan welke voorwaarde moet $p \in \mathbb{R}$ voldoen opdat de functie een maximum en een minimum zou hebben en drie verschillende nulpunten? (Hint: wat is het teken van het product van de functiewaarden in het maximum en het minimum indien er drie verschillende nulpunten zijn?)

Vraag 4 (4 punten)

(a) (1 punt) Toon aan dat voor elk reëel getal x, de volgende gelijkheid geldt

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

(b) (1 punt) Bepaal met behulp van de vorige gelijkheid een primitieve van de functie f in $\mathbb{R}$, zodat

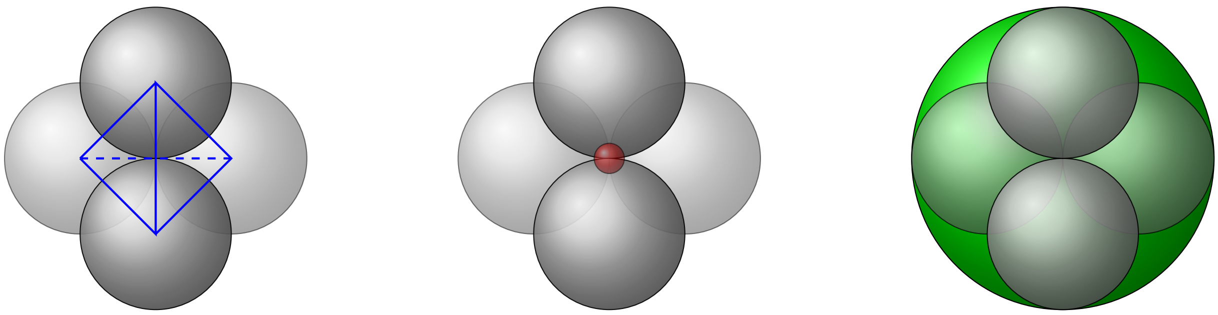
$$f(x) = \cos^3 x$$

(c) (1 punt) Gegeven a is een reëel getal verschillend van nul, bepaal de waarde van de bepaalde integraal door partiële integratie

$$I(a) = \int_0^a (2x+1)\cos^2 x \sin x \, dx$$

(d) (1 punt) Bereken $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Vraag 5 (4 punten) 4 bollen met gelijke straal r worden gestapeld zodat de middelpunten samenvallen met de hoekpunten van een gelijkzijdige tetraëder met ribbe $2r$. Bepaal de verhouding van de volumes van de kleinste bol en de grootste bol die rakend zijn aan de 4 andere bollen.



(a) (1 punt) Bereken in de driehoek gevormd door de middelpunten van de 3 onderste bollen de afstand van het zwaartepunt tot een hoekpunt.

(b) (1 punt) In de tetraëder gevormd door de middelpunten van de 4 bollen bereken de afstand van het zwaartepunt (d.w.z. het punt dat zich op gelijke afstand bevindt van de 4 hoekpunten) tot een hoekpunt met behulp van vorig resultaat.

(c) (1 punt) Bereken het volume van de grootste bol (centrum gegeven in vorige vraag).

(d) (1 punt) Bereken het volume van de kleinste bol (zelfde centrum) en bereken de verhouding van beide volumes.

Proof POL

2020 Analyse - Ruimtemeetkunde - Rijen en reeksen - Complexe getallen Reeks B

5 vragen - 4 uren

1. De tekeningen die bij sommige vragen zijn opgenomen dienen enkel ter illustratie. De figuren zijn niet op schaal getekend. Probeer dus niet na te meten.
2. Handboeken en rekentoestellen zijn niet toegestaan. Het gebruik van een lat, een gradenboog, een geodriehoek en een passer is wel toegelaten.
3. Laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = {}^{e}\!\log 2$, $\ln 3, \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (4 punten)

(a) (2 punten) Toon aan met behulp van partiële integratie (2 keer) dat

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(n\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{n - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 - 1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

(b) (1 punt) Bereken I_1 rechtstreeks met behulp van een substitutie (een verandering van veranderlijken).

(c) (1 punt) Toon aan dat de formule in (a) voor $n = 1$ de zelfde numerieke waarde geeft als het resultaat van (b) door volgende limiet te berekenen

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)}{x^2 - 1}$$

Vraag 2 (4 punten)

(a) (2 punten) Indien de veeltermfunctie $p(x)$ een dubbel nulpunt $x = x_1 = x_2$ heeft (tweevoudig nulpunt), dan is x_1 ook een nulpunt van $p'\left(= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}p\right)$. Maak gebruik van $p(x) = (x - x_1)^2\, q(x)$ om deze stelling te bewijzen.

(b) (1 punt) Pas de stelling toe op de kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ om te bewijzen dat een nodige voorwaarde voor een dubbel nulpunt is $b^2 = 4ac$.

(c) (1 punt) Gebruik de stelling om alle nulpunten van $x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = 0$ te vinden, indien één ervan een dubbel nulpunt is.

Vraag 3 (4 punten) Een bos heeft de vorm van een driehoek ABC, zodat $|AB| = 2|AC|$ en de hoek $\widehat{BAC}$ 120° bedraagt. Een recht pad AM doorkruist het bos volgens de bissectrice van de hoek $\widehat{BAC}$. Dit pad heeft een lengte gelijk aan 1 kilometer.

(a) (1 punt) Toon met behulp van de sinusregel aan dat $|BM| = 2|CM|$.

(b) (1 punt) Schrijf $|BM|$ en $|CM|$ als een functie van $|BC|$ met behulp van de cosinusregel.

(c) (1 punt) Bereken $|BC|$.

(d) (1 punt) Met behulp van de vorige resultaten, vind $|AC|$.

Vraag 4 (4 punten) Voor elk natuurlijk getal n, noteren we A_n het punt in het complexe vlak dat overeenkomt met het complexe getal z_n gedefinieerd door:

$$z_0 = 1 \quad \text{en} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n$$

We definiëren de rij (r_n) door $r_n = |z_n|$ voor elk natuurlijk getal n.

(a) (1 punt) Geef de goniometrische vorm van het getal $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

(b) (1 punt) Toon aan dat de rij (r_n) meetkundig is met reden $\frac{\sqrt{3}}{2}$ door de uitdrukking van r_n te vinden in functie van n.

(c) (1 punt) Bereken $\sum_{n=0}^{\infty} r_n$.

(d) (1 punt) Toon aan dat de $\triangle OA_nA_{n+1}$ een rechte hoek heeft in A_{n+1}.

Vraag 5 (4 punten) Arnaud en Tibo hebben elk twee niet-vervalste dobbelstenen met vier zijvlakken genummerd 1, 2, 3, 4. Zonder te kijken, probeert Tibo de som x van de getallen op de onderste zijden van Arnaud's twee dobbelstenen te raden nadat ze op een tafel zijn gegooid. Als de gok correct is ontvangt Tibo x^2 EUR, zo niet verliest hij x EUR.

Bepaal de verwachte winst van Tibo per worp van Arnaud's dobbelstenen wanneer hij elk van de volgende strategieën toepast:

(a) (1 punt) Hij kiest willekeurig x in het interval $2 \leq x \leq 8$.

(b) (1 punt) Hij gooit zijn eigen twee dobbelstenen en gokt dat x dezelfde waarde heeft.

(c) (2 punten) Hij neemt je advies aan en kiest altijd dezelfde waarde voor x. Welk getal zou je adviseren?