2020 **Epreuve POL** Série A

Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes

5 questions - 4 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = {}^{e}\log 2$, $\ln 3$, …, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points)

(a) (2 points) Déterminer $k \in \mathbb{R}$, de sorte que pour chaque nombre complexe $z = a + b\mathrm{i}$ avec $b = -2a$ on ait :

$$|z - k + 7\mathrm{i}| = |z - 2 + 9\mathrm{i}|$$

(b) (2 points) $-\mathrm{i}$ est une racine de $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$. Trouver les autres racines.

Question 2 (4 points) Un patient prend 10 mg d'un médicament le premier jour et les jours suivants 5 mg. Au cours de la journée, 40 % de la substance est décomposée dans le corps. On peut représenter les quantités de médicaments qui se trouvent dans l'organisme immédiatement après la prise du 1er, 2ème, 3ème jour, ... par une suite $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

(a) (1 point) Donner une formule récursive (par récurrence) pour cette suite.

(b) (1 point) Prouver par induction complète (par récurrence) que cette suite est limitée vers le haut.

(c) (1 point) Prouver que la suite est croissante.

(d) (1 point) Déterminer la limite de la suite à l'aide des règles de calcul des limites.

Question 3 (4 points) Soit : $f(x) = x^3 + px - 1$.

(a) (2 points) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction n'ait pas d'extremum ?

(b) (2 points) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction ait un maximum et un minimum et trois zéros différents ? (Indice : quel est le signe du produit du maximum et du minimum s'il y a trois zéros différents ?)

Question 4 (4 points)

(a) (1 point) Démontrer que pour tout nombre réel x, on a la relation suivante

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

(b) (1 point) En déduire une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que,

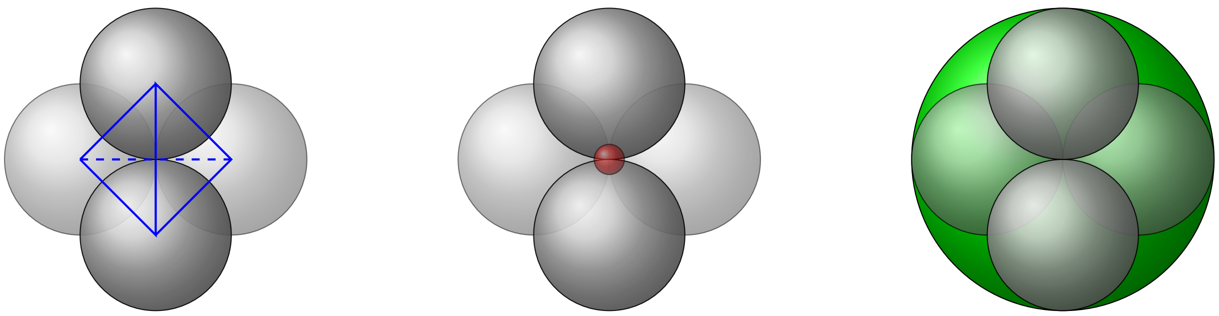
$$f(x) = \cos^3 x$$

(c) (1 point) a étant un nombre réel donné non nul, en déduire la valeur de l'intégrale définie en utilisant une intégration par parties

$$I(a) = \int_0^a (2x+1)\cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x$$

(d) (1 point) Calculer $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Question 5 (4 points) 4 sphères de même rayon r sont empilées de sorte que les points centraux coïncident avec les sommets d'un tétraèdre équilatéral avec arête $2r$. Déterminer le rapport des volumes de la plus petite sphère et de la plus grande sphère qui touchent les 4 autres sphères.



(a) (1 point) Dans le triangle formé par les centres des 3 sphères inférieures, calculer la distance entre le centre de gravité et un sommet.

(b) (1 point) Dans le tétraèdre formé par les centres des 4 sphères, calculer la distance du centre de gravité (l'isobarycentre, c.-à-d. le point qui se trouve à la même distance des 4 points) à un sommet en utilisant le résultat précédent.

(c) (1 point) Calculer le volume de la plus grande sphère (centre donné dans la question précédente).

(d) (1 point) Calculer le volume de la plus petite sphère (même centre) et calculer le rapport des deux volumes.

Epreuve POL

2020 | Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes | Série B

5 questions - 4 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3$, … , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points)

(a) (2 points) Démontrer à l'aide de l'intégration par parties (2 fois) que

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(n\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{n - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 - 1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

(b) (1 point) Calculer I_1 directement en utilisant une substitution (un changement de variable).

(c) (1 point) Démontrer que la formule de (a) pour $n = 1$ donne la même valeur numérique que le résultat de (b) en calculant la limite suivante

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)}{x^2 - 1}$$

Question 2 (4 points)

(a) (2 points) Si le polynôme $p(x)$ a un double zéro $x = x_1 = x_2$ (multiplicité 2), alors x_1 est aussi un zéro de $p'\left(= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}p\right)$. Utiliser $p(x) = (x - x_1)^2\, q(x)$ pour démontrer ce théorème.

(b) (1 point) Appliquer le théorème à l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ pour prouver qu'une condition nécessaire pour un double zéro est $b^2 = 4ac$.

(c) (1 point) Utiliser le théorème pour trouver tous les zéros de $x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = 0$, si l'un d'eux est un double zéro.

Question 3 (4 points) Une forêt a la forme d'un triangle ABC telle que $|AB| = 2|AC|$ et dont l'angle de sommet $\widehat{BAC}$ mesure 120°. Un chemin rectiligne AM traverse la forêt selon la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Ce chemin a une longueur égale à 1 kilomètre.

(a) (1 point) Démontrer en utilisant la loi des sinus que $|BM| = 2|CM|$.

(b) (1 point) En utilisant la loi des cosinus, exprimer $|BM|$ et $|CM|$ en fonction de $|BC|$.

(c) (1 point) Calculer $|BC|$.

(d) (1 point) A l'aide des résultats précédents, trouver $|AC|$.

Question 4 (4 points) Pour tout entier naturel n, on note A_n le point dans le plan complexe qui correspond au nombre complexe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

(a) (1 point) Donner la forme trigonométrique du nombre $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

(b) (1 point) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en déduisant l'expression de r_n en fonction de n

(c) (1 point) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} r_n$.

(d) (1 point) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

Question 5 (4 points) Arnaud et Tibo ont chacun deux dés à quatre faces non biaisés, les quatre faces étant numérotées 1, 2, 3, 4. Sans regarder, Tibo essaie de deviner la somme x des nombres figurant sur les faces inférieures des deux dés d'Arnaud après qu'ils aient été jetés sur une table. Si son pari est correct, Tibo reçoit x^2 EUR, mais sinon il perd x EUR.

Déterminer le gain attendu de Tibo par lancer de dés d'Arnaud lorsqu'il adopte chacune des stratégies suivantes :

(a) (1 point) Il sélectionne x au hasard dans l'intervalle $2 \leq x \leq 8$.

(b) (1 point) Il parie que x est la somme qu'il obtient en lançant ses deux propres dés.

(c) (2 points) Il suit votre conseil et choisit toujours la même valeur pour x. Quel chiffre conseilleriez-vous ?