2019

Epreuve POL

Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes

5 questions - 4 heures

Série B

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerre et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

(a) (1 point) Calculer I_0

(b) (1 point) Calculer I_1

(c) (1 point) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}_0$ on a $(3+2n)\,I_n = 2nI_{n-1}$.

(d) (1 point) Calculer I_5

Question 2 (4 points) Soit : $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(a) (1 point) Calculer la limite de f pour $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$

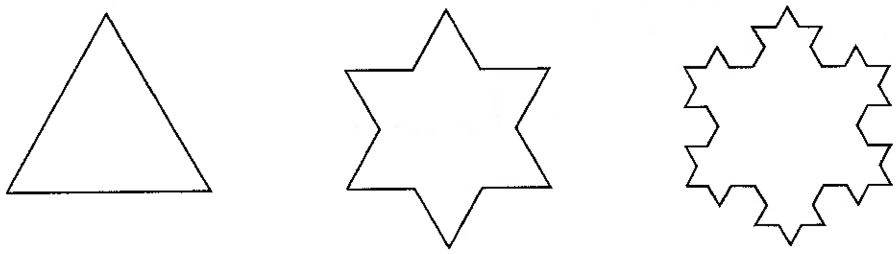
(b) (2 points) Calculer la dérivée de f et démontrer la relation suivante entre f et f' :

$$f'(x) = f(x)\,(1 - f(x))$$

(c) (1 point) Soit $g(x) = 2f(x) - 1$. Déterminer la relation entre g et g'.

Question 3 (4 points) Le flocon de neige de Koch peut être construit en commençant par un triangle équilatéral et en ajustant ensuite chaque côté récursivement comme suit :

1. Divisez le segment en trois segments de longueur égale.
2. Dessinez un triangle équilatéral basé sur le segment médian de l'étape 1.
3. Retirez le segment de ligne qui est la base du triangle de l'étape 2.



1er itération   2ème itération

La surface du triangle d'origine est 1.

(a) (1 point) Déterminer la surface du flocon de neige de Koch après 1 itération.

(b) (1 point) Déterminer la surface du flocon de neige de Koch après 2 itérations.

(c) (1 point) Déterminer la surface du flocon de neige de Koch après n itérations.

(d) (1 point) Quelle est la limite de la surface du flocon de neige de Koch après $n \to +\infty$ itérations ?

Question 4 (4 points) Un clavier comporte 42 touches dont 26 représentent les 26 lettres de l'alphabet, les autres représentent des chiffres ou des symboles.

(a) (1 point) Arnaud, qui a 3 ans, frappe au hasard sur une touche du clavier, chaque touche ayant la même probabilité d'être frappée. Quelle est la probabilité qu'il frappe une lettre de son prénom ?

(b) Arnaud frappe successivement 6 touches, distinctes ou non, quelle est la probabilité des événements suivants :

  i. (1 point) Arnaud frappe une lettre deux fois et 4 autres lettres différentes ;

  ii. (1 point) Arnaud frappe son prénom ;

  iii. (1 point) Arnaud frappe son prénom, si l'on sait qu'il a frappé une lettre deux fois et 4 autres lettres différentes.

Question 5 (4 points) Soient : $A(3,2,1)$, $B(1,0,3)$ et

$$e \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

(a) (1 point) Le lieu géométrique de tous les points C de sorte que le centre du cercle circonscrit au $\triangle ABC$ se situe sur e est un cercle avec centre $(1,1,1)$ et rayon $\sqrt{5}$, dans le plan $\alpha \equiv x - 2y - z + 2 = 0$. Démontrer.

(b) (1 point) Déterminer le point S de ce lieu géométrique qui se trouve en $\beta \equiv 2x + y + 2 = 0$.

(c) (1 point) Déterminer l'aire du $\triangle ABS$.

(d) (1 point) Déterminer $\tan \widehat{ASB} = \text{tg}\, \widehat{ASB}$.

2018 — **Epreuve POL** — Série B

Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes

5 questions - 4 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerre et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points) On donne le nombre complexe $a = \frac{1}{2}(1+i)$.

(a) (1 point) Calculer le module du nombre complexe $a - 1$.

(b) (1 point) On pose $z_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{R}_0 : z_n = a^n$ et $u_n = |z_n - z_{n-1}|$. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et en préciser le premier terme u_1 et la raison.

(c) (1 point) Calculer la somme $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

(d) (1 point) Calculer, si elle existe, la limite de s_n lorsque $n \to +\infty$.

Question 2 (4 points) Soient :

$$b : \frac{x-4a-1}{a} = \frac{y-2a-2}{1} = \frac{z}{-a} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$c : \begin{cases} x + y + 2a - 1 = 0 \\ z + a + 3 = 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$d : \frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} \quad (a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\})$$

(a) (1 point) Démontrer $\forall a \in \mathbb{R}_0 : b$ et c se croisent.

(b) (1 point) Trouver une équation cartésienne du plan α qui inclut b et est parallèle à d.

(c) (1 point) Trouver une équation cartésienne du plan β qui inclut c et est parallèle à d.

(d) (1 point) Démontrer que les surfaces α et β se coupent toujours ($\forall a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$) et que la droite d'intersection passe par un point fixe. Quel est ce point ?

Question 3 (4 points) La courbure d'une fonction est définie comme suit :

$$\left| \frac{f''(x)}{\left(1 + f'(x)\right)^{\frac{3}{2}}} \right| \tag{1}$$

(a) (1 point) Calculer la courbure de la fonction $f(x) = \ln x$.

(b) (2 points) Calculer la dérivée de la courbure de f.

(c) (1 point) Pour quelles valeurs de x la courbure de f est-elle maximale ? Si un maximum n'existe pas, calculer les limites de la courbure aux bornes du domaine.

Question 4 (4 points) Soit :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) (1 point) Calculer : $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^1\,\mathrm{d}x$

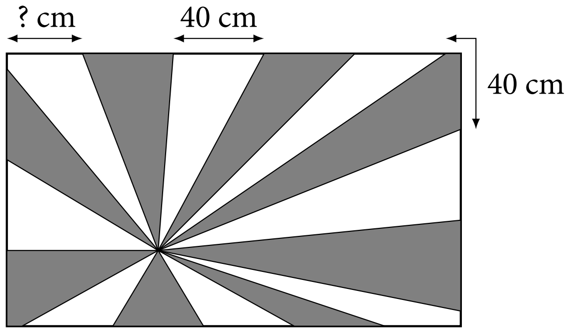
(b) (1 point) Calculer : $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2\,\mathrm{d}x$

(c) (2 points) Démontrer par induction complète : $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x = n!$

Question 5 (4 points) Le drapeau de Fort En Maths est un rectangle de 2 mètres (horizontale) sur 1,2 mètre (verticale). A partir de n'importe quel point strictement intérieur au rectangle, on joint le contour du rectangle tous les 40 centimètres.

On colorie alternativement en blanc et en gris les triangles et les quadrilatères ainsi formés. Le total des aires grises dépasse le total des aires blanches : la différence est exactement le centième de l'aire du rectangle.

En partant du sommet en haut à gauche et en allant à l'horizontale vers la droite, quelle distance parcourt-on jusqu'au premier changement de couleur (du blanc au gris), en centimètres ?



2016 | **Epreuve complémentaire POL** | **Série 2**

10 questions

Remarque: laisser dans les réponses des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points) On donne la fonction $f(x) = x \cdot e^{-x} + x$ et son graphique.

(1) Montrer que la droite d d'équation $y = x$ est une asymptote pour $x \to +\infty$.

(2) Etudier la position du graphique par rapport à la droite d.

Question 2 (4 points) Calculer

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + 5x + 5) \cdot \cos(2x)\, dx.$$

Question 3 (4 points)

(1) Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \tan^{n+1} x$.

(2) Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx, n \in \mathbb{N}_0.$.

(3) En déduire que

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

Question 4 (4 points) $z^3 + 2(1-i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1+m^2) = 0,\ m \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.

(1) Montrer que l'équation admet une racine imaginaire pure z_1 et calculer cette racine z_1.

(2) Calculer en fonction du paramètre réel m les deux autres racines.

Question 5 (4 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0.$$

Question 6 (4 points) On donne l'équation $X^2 - 4X - 12I_2 = 0$ avec $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) Démontrer que $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ est une racine de cette équation.

(2) Calculer une deuxième racine.

Question 7 (4 points) D'une suite géométrique avec un facteur (raison, ratio) positif r on sait que le cinquième terme est égal à neuf fois le troisième terme et que le sixième terme est égal à 486. Calculer le facteur r et calculer le premier terme.

Question 8 (4 points) Dans une urne se trouvent dix boules blanches et cinq boules rouges. On tire simultanément trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité qu'on tire au moins une boule rouge.

Question 9 (4 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0.$$

Question 10 (4 points) On donne les points $A(1, -2, -3)$, $B(0, 1, -2)$ et $C(-2, -5, 1)$.

(1) Donner l'équation cartésienne du plan α défini par les points A, B et C.

(2) Un point P se trouve sur la droite OA et la distance entre le point P et le plan α est égal à 5. Calculer les coordonnées du point P.

2015 | **Epreuve complémentaire POL** | **Série 3**

10 questions

Remarque: laisser dans les réponses des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points) On donne la fonction (de la variable réelle x)

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1-e^x}.$$

On demande de calculer le(s) extremum(s) (minimum et/ou maximum).

Question 2 (4 points) Calculer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{t\cdot(1-t)}\, dt.$$

Question 3 (4 points) On donne $I_n = \displaystyle\int_1^e \ln^n(x)\, dx,\ n \in \mathbb{N}_0$.

(1) Calculer I_2.

(2) Démontrer que $I_{n+1} + (n+1)I_n = e$.

Question 4 (4 points) On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

(1) Déterminer des réels a, b et c tels que pour tout complexe z

$$P(z) = (z^2+3)(az^2+bz+c).$$

(2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Question 5 (4 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\ln(x^3 + x^2 - 2x) \ \geq\ 1 + \ln(x+2).$$

Question 6 (4 points) On donne la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculer $(A^{-1})^2$.

Question 7 (4 points) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ si et seulement si $|a| < 1$.

(1) Pour quelle(s) valeur(s) de q obtient-on $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln q)^n} \in \mathbb{R}$?

(2) Pour quelle valeur de q obtient-on $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln q)^n} = \frac{3}{2}$?

Question 8 (4 points) Une urne contient quatre boules rouges et six boules noires.
L'épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire et deux boules rouges.

Question 9 (4 points) Démontrer que pour $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ on a

$$\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha} = 2\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}).$$

Question 10 (4 points) On donne: les droites a et b et le plan α

$$a : \begin{cases} x = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad b : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \alpha : x + z = 0.$$

La droite c avec vecteur directeur $(1,1,0)$ coupe les droites a et b, et la droite c a aussi un point P commun avec le plan α.
On demande de calculer l'équation de la droite c et de calculer les coordonnées du point P.

Epreuve complémentaire POL

2014 **Série 2**

6 questions

Remarque: laisser dans les réponses des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (5 points)

Etudier la fonction (de la variable réelle x)

$$f(x) = \ln(1 + x + x^2)$$

(domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique).

Question 2 (3 points) Calculer en commençant par une intégration par parties

$$I = \int_0^{\pi} \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx.$$

Question 3 (3 points) Soient $z_0, z_1, \ldots, z_5$ les racines (zéros) de l'équation $z^6 - 1 = 0$.
Représentez les racines dans le plan complexe.
Calculer toutes les distances possibles entre les points z_i et z_j avec $i, j \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ et $i \neq j$.

Question 4 (3 points) On sait que $1 + x + \ldots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$
Calculez toutes les valeurs de $t \in [0, \pi]$ telles que

$$1 + \cos t + \cos^2 t + \ldots + \cos^{11} t = \frac{3}{4}(1 + \cos^3 t + \cos^6 t + \cos^9 t).$$

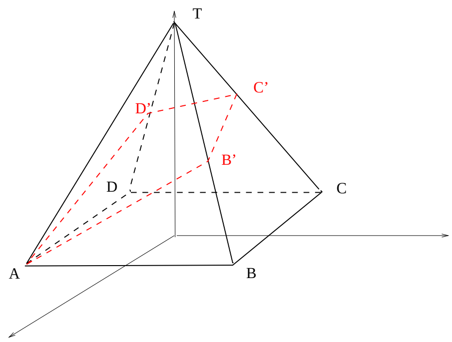
Question 5 (3 points) La somme des deux premiers termes d'une suite géométrique est égale à 36. Le produit du premier terme avec le troisième terme est égal à neuf fois le deuxième terme. Calculer la somme des huit premiers termes de cette suite géométrique.

Question 6 (3 points) Dans un repère orthonormé, on a les points

$$A(3,-3,0),\ B(3,3,0),\ C(-3,3,0),\ D(-3,-3,0) \text{ et } T(0,0,6).$$

On demande:

(1) de donner l'équation du plan α qui comprend le point A et qui est perpendiculaire à la droite TC.



(2) calculez les coordonées des points $B' = \overline{TB} \bigcap \alpha$, $C' = \overline{TC} \bigcap \alpha$ et $D' = \overline{TD} \bigcap \alpha$.

(3) calculez le volume du corps formé par les points $TAB'C'D'$

(4) calculez le volume du corps formé par les points $AB'C'D'BCD$

(5) calculez le rapport entre ces deux volumes.

---

6 questions

Remarque: laisser dans les réponses des nombres comme π, e, $\ln 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (5 points) Etudier la fonction (de la variable réelle x) $f(x) = e^x|x-2|$ (domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique).

Question 2 (3 points) Calculer

$$I = \int_{\ln \frac{\sqrt{3}}{3}}^{0} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Question 3 (3 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ avec

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = 1 + i$$

(1) Déterminer la forme trigonométrique de $Z = \frac{z_1}{z_2}$ $(R(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha),\ \ \alpha \in [0, \pi],\ R \in \mathbb{R}^+)$.

(2) Déterminer la forme algébrique de $Z = \frac{z_1}{z_2}$ $(a + ib,\ \ a, b \in \mathbb{R})$.

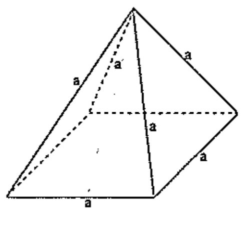
(3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

Question 4 (3 points) Les racines (zéros) du polynôme $x^2 + px + q$ sont $\tan\alpha$ et $\tan\beta$. Calculer l'expression V ci-dessous en fonction de p et q

$$V = \sin^2(\alpha+\beta) + p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + q\cos^2(\alpha+\beta).$$

Question 5 (3 points) On considère une suite de nombres réels $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Déterminer n sachant que $u_1 + u_n = 66$, $u_2 \cdot u_{n-1} = 128$, $S_n = u_1 + \ldots + u_n = 126$ et que la suite est une suite géométrique de raison $r > 1$.

Question 6 (3 points) La superficie totale d'une pyramide à quatre faces régulières dont tous les côtés ont la même longueur, est égale à $16(1+\sqrt{3})$.
Calculer le volume de cette pyramide.



6 questions

Remarque: laisser dans vos réponses des nombres comme π, e, $\ln 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (5 points) Etudier la fonction (de la variable réelle x) $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$ (domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f'(x)$, représentation graphique).

Question 2 (3 points) Calculer

$$I = \int_{-\infty}^{0} e^{x} \cdot \sqrt{1 - e^{2x}}\, dx.$$

Question 3 (3 points)

Dans le triangle ABC, on a $a = \frac{7}{3} c$ et $b = \frac{8}{3} c$, où $a = |BC|$, $b = |AC|$ et $c = |AB|$.

Prouver que $\dfrac{\sin \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\sin \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}} = \dfrac{-1}{3}$ et que $\dfrac{\tan \frac{\hat{A}}{2}}{\tan \frac{\hat{B}}{2}} = \dfrac{1}{2}$, et déterminer ensuite la valeur de l'angle $\hat{A}$.

Question 4 (3 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$3^{2x-3} - 10 \cdot 3^{x-2} + 3 = 0.$$

Question 5 (3 points) Déterminer les nombres réels a et b, ainsi que les racines de l'équation

$$x^4 + x^3 - 12\,x^2 + a\,x + b = 0\,,$$

sachant que cette équation a deux racines dont le produit vaut 2, tandis que les deux autres racines ont une somme égale à 2.

Question 6 (3 points) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on donne les points $A\,(1, 2, 0)$, $B\,(2, 1, 2)$ et $C\,(3, 1, 1)$ et la droite d d'équations

$$\begin{cases} 4x + 2y + z &= 3\,, \\ 6x + 3y - z &= 2 \end{cases}.$$

On demande:

(1) de déterminer l'équation cartésienne du plan α qui contient le point A et la droite d;

(2) de déterminer l'aire du triangle ABC.

2011 — **Epreuve complémentaire POL** — Série 3

6 questions

Remarque: laisser dans vos réponses des nombres comme π, e, $\ln 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (5 points) Etudier la fonction (de la variable réelle x) $f(x) = e^{\frac{1}{2(x^2-x)}}$ (domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, asymptotes, représentation graphique). Calculer aussi les limites à gauche et à droite de la fonction $f(x)$ dans les points de discontinuité.

Question 2 (3 points) Calculer, en commençant par une intégration par parties,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos x}{(1+\sin x)^2}\, dx\,.$$

Question 3 (3 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$ ($\log = \log_{10}$):

$$\begin{cases} \log x + \log(y^2) = 4; \\ \log^2 x - 3\log(xy) = -5. \end{cases}$$

Question 4 (3 points) L'équation complexe ci-dessous a un zéro réel. Calculer tous les zéros.

$$z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i = 0.$$

Question 5 (3 points) Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ on a:

$$\text{si } \sin^2(a+b) = (\sin a + \sin b)^2 \text{ alors } \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b.$$

Question 6 (3 points) Dans un repère orthonormé on considère les points $A(0,1,0)$ et $B(2,3,1)$ et la droite c d'équations

$$\begin{cases} x + y = 1; \\ 2y - z = 0. \end{cases}$$

On demande:

(1) de calculer le point $C \in c$ tel que AB et AC se coupent perpendiculairement ;

(2) de donner l'équation cartésienne de la droite d, perpendiculaire au plan défini par les points A, B et C tel que $A \in d$;

(3) de calculer le point $F \in d$ tel que la distance (AF) est égale à la distance (AC).

Remarque: laisser dans vos réponses des nombres comme π, e, $\ln 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (5 points) Etudier la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sqrt{x}\ln x$ (zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f'(x)$, représentation graphique). Remarque: $e \approx 2,7$.

Question 2 (3 points) Calculer, en commençant par une intégration par parties,

$$I = \int_4^{12} \frac{\ln(4+x)}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Question 3 (3 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x + 6 \leq \sqrt{x^3 + 7x^2 - 19x}\,.$$

Question 4 (3 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$(1+i)\,z^3 + (1-i)\,z^2 + 2\,z - 4 = 0\,,$$

sachant que $z_1 = 1$ est une solution réelle de cette équation.

Donner aussi l'argument et le module des solutions.

Question 5 (3 points) Déterminer les angles du triangle ABC, sachant que $\hat{A} = 3\,\hat{B}$ et que $|BC| = 2\,|AC|$.

Question 6 (3 points) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A\,(4,-4,0)$, $B\,(-4,4,0)$, $C\,(0,0,8)$ et $D\,(8,8,8)$, ainsi que le plan α d'équation $x + 2y - z = 4$.

On demande:

(a) de déterminer l'équation cartésienne du plan β qui passe par A et qui est perpendiculaire à la droite BC;

(b) de déterminer les coordonnées du point d'intersection P de la droite BC et du plan β;

(c) de déterminer l'équation cartésienne du plan γ qui passe par le point D et qui est parallèle au plan α.

2009 **Epreuve complémentaire POL** **Série 1**

6 questions

Remarque: laisser dans vos réponses des nombres comme π, e, $\ln 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... sous leur forme symbolique.

Question 1 (3 points) Calculer, en commençant par une intégration par parties,

$$I = \int_1^3 \ln(x^2 - 2x + 5)\, dx\,.$$

Question 2 (5,5 points)

(a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a $e^x - x - 1 \geq 0$.

(b) Etudier la fonction (de la variable réelle x) $\qquad f(x) = x\,\dfrac{e^x}{e^x - 1}$

(domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, asymptotes, $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$, représentation graphique).

Question 3 (2,5 points) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A\,(1, 2, 1)$, $B\,(2, 3, 2)$, $C\,(-2, 1, -1)$ et $D\,(4, 1, 0)$.

On demande:

(a) de déterminer l'équation cartésienne du plan α qui passe par les points A, B et C;

(b) de déterminer les coordonnées du pied de la perpendiculaire issue de D sur α.

Question 4 (3 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 - 2iz^2 + (15 - 8i)z - 16 - 30i = 0\,,$$

sachant que $z_1 = 2\,i$ est une des racines de cette équation.

Donnez aussi la partie réelle et la partie imaginaire des racines.

Question 5 (3 points) On donne les polynômes $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$ et $g(x) = x^2 + ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

On demande de déterminer a et b de telle manière que $g(x)$ divise $f(x)$.

Question 6 (3 points) Soit M le milieu du côté $[BC]$ du triangle ABC. Démontrer que, si $|AB| = |AM|$, alors on a $\tan \hat{B} = 3 \tan \hat{C}$ et $\sin \hat{A} = 2 \sin(\hat{B} - \hat{C})$.

Epreuve complémentaire POL

6 questions

Question 1 (1) Etudier la fonction (de la variable réelle x) $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$ (domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique). Remarque: $e \approx 2,7$.

(2) Déterminer les coordonnées du point P pour lequel la tangente en P au graphique de f passe par l'origine.

Question 2 Calculer

$$I = \int_1^2 \frac{3}{x^3+1}\,dx\,.$$

Remarque: $\ln 2 \approx 0,7$, $\ln 3 \approx 1,1$ et $\sqrt{3}\pi \approx 5,4$.

Question 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1\,.$$

Question 4 On donne les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ a & a^2 & a^3 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix},$$

où a est un paramètre réel.

On demande de déterminer toutes les valeurs de a pour lesquelles on a $AV = W$ et de donner pour chaque valeur trouvée de a la valeur correspondante de $\det A$.

Question 5 Dans le triangle ABC, on a la relation $\sin(\hat{A} + \dfrac{\hat{B}}{2}) = k \sin\dfrac{\hat{B}}{2}$, avec k une constante réelle et positive.

On demande de démontrer que $\tan\dfrac{\hat{A}}{2}\tan\dfrac{\hat{C}}{2} = \dfrac{k-1}{k+1}$.

Question 6 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $O\,(0,0,0)$, $A\,(2,2,4)$, $B\,(4,4,2)$, $C\,(3,1,5)$.

On demande:

(1) de déterminer l'équation cartésienne des sphères passant par les points O, A et B et de rayon $= 3\sqrt{3}$;

(2) de déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle OAB;

(3) de déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

2006

Epreuve complémentaire POL

Série 3

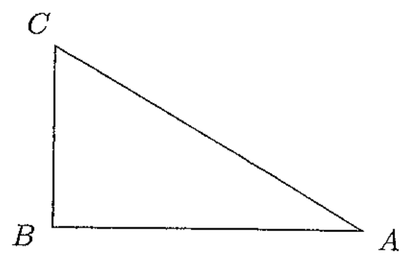
6 questions

Question 1 Etudier la fonction (de la variable réelle x) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(2x)}$ (domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$, représentation graphique). Remarque: $e \approx 2,7$.

Question 2 Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{16\,\cos t}{(\cos^2 t + 3)^2}\,dt.$$

Question 3 Dans le triangle ABC on a $\hat{B} = 90°$ et $\hat{A} < \hat{C}$ (voir figure). Sur le côté $[AB]$ on prend le point P tel que $|AP| = |BC|$ et sur le prolongement du côté $[BC]$ on prend le point Q (C se situe entre B et Q) tel que $|CQ| = |AB|$. La droite PQ coupe le côté $[AC]$ en R.



On demande de démontrer que $A\hat{R}P = 45°$.

Question 4 On donne les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer la matrice A^{-1} et la matrice X de sorte que $A \cdot X = B \cdot A^{-1}$.

Vraag 5 On considère la suite de nombres positifs $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, où, pour tout $n > 1$, on a $t_1\,t_2 \cdots t_{n-1} = 4t_n$.

Ensuite, on considère une nouvelle suite $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$, où, pour tout $n \geq 1$, $T_n = \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} t_n}$.

On demande: (a) de démontrer que la suite $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ est une suite géométrique;

(b) de déterminer l'expression de $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ en fonction de n, sachant que $t_6 = 16$.

Question 6 On donne un cube de côté 6.

Une sphère passe par les 4 sommets de la base et elle est tangente au plan supérieur.

On demande d'établir l'équation de cette sphère (dans un repère orthonormé qu'on choisira soi-même).

2005

Epreuve complémentaire POL

5 questions

Série 1

Question 1 Etudier la fonction (de la variable réelle x) $\quad f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1+x}}$

(domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique).

Question 2 Calculer:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5\sin x + 4\cos x + 5}\, dx \qquad \text{et} \qquad L = \lim_{x \to 0} \frac{x\ln(1+x) - x^2}{e^x - e^{-x} - 2x}\,.$$

Remarque: on admet que $\ln 3 = 1,1$ et que $\ln 5 = 1,6$.

Question 3

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4}$;

(b) $\log_2\left(2^{x+1} - 15\right) + x = 3$.

Question 4

On donne les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On demande:

(1) de démontrer qu'il existe des nombres réels a et b pour lesquels on a

$$(A + aI_3)B = b\,C^{-1}\,,$$

où I_3 est la matrice unité (matrice identité) d'ordre 3;

(2) de déterminer A^{-1}.

Question 5

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A\,(0,2,1)$ et $B\,(-1,1,3)$, ainsi que le plan α d'équation $x + 5y + 9z - 13 = 0$ et le plan β d'équation $3x + ky - 5z + 1 = 0$, où k est un paramètre réel.

On demande de déterminer la valeur du paramètre k afin que la droite AB coupe la droite d'intersection des plans α et β.

Question 1 (a) Calculer $\lim_{x \to 0^+} x\,(\ln x - 1)^2$.

(b) Etudier la fonction (de la variable réelle x)

$$f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$$

(domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique).

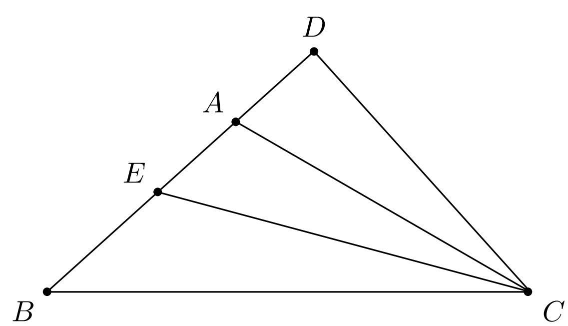
Remarque: $e \approx 2,7$.

Question 2 Calculer les intégrales suivantes:

$$\text{(a)} \quad I_1 = \int_{3\sqrt{3}}^{4\sqrt{2}} \frac{12}{x\,\sqrt{36 - x^2}}\,dx\,, \qquad \text{(b)} \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos x\, \ln(1 + \cos^2 x)\,dx\,.$$

Question 3 Dans le triangle ABC, on a $\hat{A} = \alpha > 90°$. La hauteur issue de C coupe le prolongement du côté $[AB]$ en D et la bissectrice de l'angle C coupe $[AB]$ en E (voir figure). De plus, on pose $\hat{B} = \beta$.
On demande:
(a) d'exprimer l'angle $E\hat{C}D$ en fonction de α et β;
(b) de démontrer que, si $|AD| = |AE|$, on a

$$\tan^3 \frac{\alpha}{2}\, \tan \frac{\beta}{2} = 1\,.$$



Question 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\log_2(x+1) + \log_4(x) < 1\,.$$

Question 5 On donne le cercle C de centre $M\,(0,4)$ et de rayon $R = 2$ et la droite d d'équation $y + 3 = 0$.

On demande de déterminer les cercles passant par l'origine et qui sont tangents au cercle C et à la droite d.

$$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\qquad \tan\frac{\pi}{4}=1\,,\qquad \tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\,.$$

Question 1

Etudier la fonction $f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,:\,x\mapsto f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}+e\right)$

(domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique).

Remarque: $e\approx 2,7$.

Question 2

Calculer les intégrales suivantes:

$$\text{(a)}\quad I_1=18\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,\ln(1+e^x)\,dx\,,\qquad \text{(b)}\quad I_2=\int_0^2\frac{5\,t^2}{(1+t)\,(4+t^2)}\,dt\,.$$

Question 3

Dans le triangle ABC, on donne $\hat{A}=\dfrac{\pi}{3}$ et le rapport $\dfrac{b}{c}=2+\sqrt{3}$, où $b=|AC|$ et $c=|AB|$.

On demande de calculer la tangente de l'angle $\dfrac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$, puis les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

Question 4

On donne l'équation $4x^3-24x^2+23x+18=0$.

On demande de résoudre cette équation sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Question 5

On considère deux tangentes différentes t_1 et t_2 à la parabole d'équation $y^2=2ax$, $a\in\mathbb{R}$.

On demande de démontrer que l'ordonnée du point d'intersection entre t_1 et t_2 est la moyenne arithmétique des ordonnées des points tangents.

2003 **Algèbre - Géométrie** Série 2

4 questions

Question 1
On donne: l'équation suivante, dans laquelle m est un paramètre réel

$$x^2 + mx + 2 = 0.$$

On demande de déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation possède deux racines réelles distinctes telles que la plus grande soit supérieure ou égale à deux fois la plus petite.

Question 2
On donne: la matrice A dans laquelle x, y et z sont des paramètres réels

$$A = \begin{bmatrix} z - y & -\dfrac{x+y}{2} \\ 0 & z - 2x \end{bmatrix}$$

On demande de déterminer x, y et z de sorte que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 3
On donne l'équation suivante, dans laquelle a et b sont des paramètres réels

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})^{13}}{(\sqrt{3} - i)^8} = a + ib, \quad i^2 = -1.$$

On demande de déterminer a et b.

Question 4
On donne: le tétraèdre régulier $ABCD$ de côté $|AB| = k$. Le repère orthonormé est choisi de sorte que O se trouve au milieu du segment $[AB]$ et que $A, B \in$ l'axe des x et que $C \in$ l'axe des y.

On demande:

(1) les coordonnées de A, B, C et D;

(2) les coordonnées du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$;

(3) le rayon de cette sphère.

Epreuve complémentaire POL

2003 **Analyse - Trigonométrie** Série 2

4 questions

Question 1

Etudier la fonction

$$f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,:\,x\mapsto f(x)=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

(domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique).

Question 2

Calculer

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\,\sin x-\tan x}{\left(\sqrt{\sin^2 x+1}-1\right)\,\sin x}\,.$$

Question 3

(1) Démontrer que $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\,\sin x\,.$$

Question 4

Calculer

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{96}{x^4\sqrt{4-x^2}}\,dx\,.$$
