2023 **Koninklijke Militaire School - Bijkomende proef POL** **Reeks C Deel 1**

Analyse - Goniometrie - Meetkunde

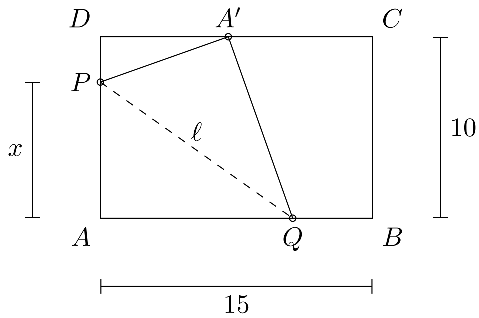
4 vragen - 3 uur

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers zijn wel toegestaan.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	5	5	5	5	20

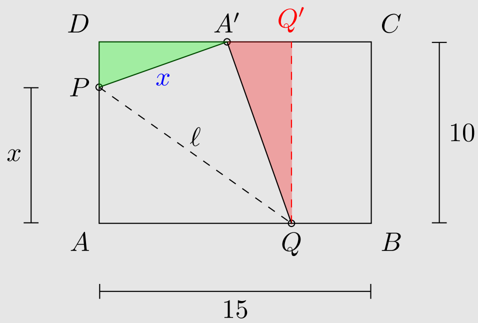
Vraag 1 .... 5 punten

We vouwen een rechthoekig vel papier $ABCD$ met afmetingen 10×15 door het hoekpunt A naar een punt A' te brengen dat zich op de lange zijde $[CD]$ bevindt. We duiden de lengte van het lijnstuk $[AP]$ aan met x, en de lengte van de vouw $[PQ]$ (gestippeld op de figuur) met ℓ.



(a) (4 punten) Toon aan dat $\ell^2 = \dfrac{x^3}{x-5}$.

Vul het diagram aan:



Aan de hand van Pythagoras:

$$\ell^2 = x^2 + |A'Q|^2.$$

De twee gekleurde driehoeken zijn gelijkvormig. Dit laat toe om $|A'Q|$ te vinden als functie van x:

$$\frac{|A'Q|}{x} = \frac{10}{|DA'|} \qquad \text{waarbij} \quad |DA'| = \sqrt{x^2 - (10-x)^2} \quad \text{in de gekleurde driehoek } A'DP.$$

We vinden dat

$$|A'Q| = \frac{10x}{\sqrt{x^2-(10-x)^2}} = \frac{10x}{\sqrt{20x-100}}.$$

Voeg deze uitdrukking in in de uitdrukking voor ℓ^2:

$$\ell^2 = x^2 + \frac{100x^2}{20x-100} = x^2 + \frac{5x^2}{x-5} = \frac{x^3}{x-5}.$$

(b) (1 punt) Bepaal de kleinste mogelijke waarde voor ℓ.

Leid de uitdrukking voor ℓ^2 af als functie van x. We vinden:

$$\frac{3x^2(x-5)-x^3}{(x-5)^2} = \frac{x^2(2x-15)}{(x-5)^2}.$$

Deze uitdrukking is nul voor $x = \frac{15}{2}$ en de overeenkomstige waarde van ℓ is $\ell_{\min} = \frac{15}{2}\sqrt{3}$.

Opmerking. We hebben een optimalisatieprobleem op een interval van de vorm $[x_{\min}, x_{\max}]$. We vergelijken de gevonden waarde $\ell_{\min}$ met de waarden van ℓ aan de uiteinden van het interval.

- De maximale waarde voor x is $x_{\max} = 10$.
- De minimale waarde voor x komt overeen met $|A'Q| = 15$, dat wil zeggen

  $$15 = \frac{10x}{\sqrt{20x-100}}.$$

  Deze vergelijking kan worden herschreven als een tweedegraadsvergelijking:

  $$x^2 - 45x + 225.$$

  De oplossingen zijn

  $$\frac{1}{2}(45 \pm 5\sqrt{45}) = \frac{1}{2}(45 \pm 15\sqrt{5}) = \frac{15}{2}(3 \pm \sqrt{5}).$$

  De minimale waarde voor x is $x_{\min} = \frac{15}{2}(3-\sqrt{5})$. Merk op dat deze waarde groter is dan 5, dus de uitdrukking voor ℓ^2 is positief. (De andere wortel is groter dan 15 en moet worden verworpen.)
- We kunnen dan controleren dat de berekende waarde $\ell_{\min}$ effectief lager is dan de waarden die ℓ aanneemt in $x_{\min}$ en $x_{\max}$.

Vraag 2 .... **5 punten**

Voor alle $x > 0$ wordt de functie f gegeven door:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln u}{u+1} du.$$

(a) (3 punten) Toon aan dat $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln^2(x)$.

We gebruiken een verandering van variabelen $t = 1/u$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{1/x} \frac{\ln u}{u+1} du = \int_1^x \frac{\ln(1/t)}{1/t+1}\left(\frac{-dt}{t^2}\right) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2+t} dt.$$

Vandaar

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{u\ln u + \ln u}{u^2+u} du = \int_1^x \frac{\ln u}{u} du = \int_0^{\ln x} v dv = \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{\ln x}$$

via de substitutie $v = \ln u$.

We bekomen

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(\ln x)^2}{2}.$$

(b) (2 punten) Bereken $f(e^{-5}) + f(e^{-4}) + f(e^{-3}) + \ldots + f(e^4) + f(e^5)$.

Groepeer de termen 2 bij 2:

$$\begin{aligned} f(e^{-5}) + f(e^5) &= \frac{1}{2}\ln^2(e^5) = \frac{1}{2}25 \\ f(e^{-4}) + f(e^4) &= \frac{1}{2}\ln^2(e^4) = \frac{1}{2}16 \\ f(e^{-3}) + f(e^3) &= \frac{1}{2}\ln^2(e^3) = \frac{1}{2}9 \\ f(e^{-2}) + f(e^2) &= \frac{1}{2}\ln^2(e^2) = \frac{1}{2}4 \\ f(e^{-1}) + f(e^1) &= \frac{1}{2}\ln^2(e^1) = \frac{1}{2}1 \\ f(e^0) &= 0. \end{aligned}$$

De som bedraagt $\frac{1}{2}(1 + 4 + \ldots + 25) = \frac{55}{2}$.

Vraag 3 .... **5 punten**

Los op in $[0, \pi]$:

$$\frac{\cos(3x)}{2\cos(x) - 1} > \frac{\cos(4x)}{2\cos(2x) + 1}.$$

We gaan dezelfde noemer gebruiken. Kijk naar de noemer van de tweede breuk.

$$2\cos(2x) + 1 = 2(2\cos^2(x) - 1) + 1 = 4\cos^2(x) - 1.$$

Het probleem wordt:

$$\frac{\cos(3x)(2\cos(x) + 1) - \cos(4x)}{(2\cos(x) - 1)(2\cos(x) + 1)} > 0.$$

Beschouw de teller:

$$\begin{aligned} \cos 3x\,(2\cos x + 1) - \cos 4x &= 2\cos 3x \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x \\ &= \cos 2x + \cos 4x + \cos 3x - \cos 4x \qquad \text{(inverse formule van Simpson)} \\ &= \cos 2x + \cos 3x \\ &= 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} \qquad \text{(formule van Simpson).} \end{aligned}$$

We kunnen een tekentabel opstellen:

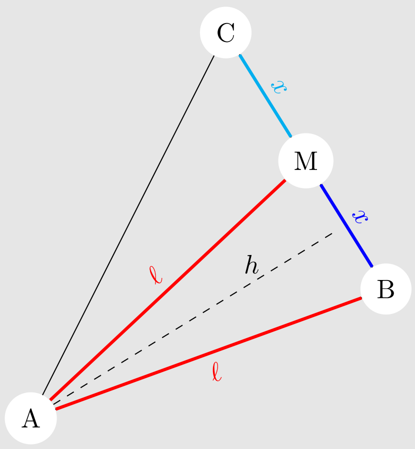
	0		$\frac{\pi}{5}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{5}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\cos 5/2x$	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0
$\cos x/2$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
$2\cos x + 1$	+	+	+	+	+	+	+	+	0	-	-
$2\cos x - 1$	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-
breuk	+	+	0	-	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	+	0

De oplossing is de verzameling $]0, \pi/5[\cup]\pi/3, 3\pi/5[\cup]2\pi/3, \pi[$.

Vraag 4 .... **5 punten**

Het punt M is het midden van zijde $[BC]$ van de driehoek ABC waarbij geldt dat $|AB| = |AM|$.

(a) (2 punten) Bewijs dat $\tan\hat{B} = 3\tan\hat{C}$.



Relaties in de driehoek:

$$\tan\hat{B} = \frac{h}{x/2}$$
$$\tan\hat{C} = \frac{h}{3x/2}$$

Vandaar $\tan\hat{B} = 3\tan\hat{C}$.

(b) (3 punten) Bewijs dat $\sin\hat{A} = 2\sin\left(\hat{B}-\hat{C}\right)$.

Wet van sinussen in $\triangle AMC$ (eerste vergelijking) en in $\triangle ABC$ (tweede vergelijking):

$$\frac{\sin(\widehat{CAM})}{x} = \frac{\sin\hat{C}}{\ell}$$
$$\frac{\sin\hat{A}}{2x} = \frac{\sin\hat{C}}{\ell}$$

waarbij

$$\widehat{CAM} = \widehat{CAB} - \widehat{MAB} = (\pi - \hat{B} - \hat{C}) - (\pi - 2\hat{B}) = \hat{B} - \hat{C}$$

Daaruit volgt dat $\sin\hat{A} = 2\sin\left(\hat{B}-\hat{C}\right)$.