2023 **Koninklijke Militaire School - Bijkomende proef POL** **Reeks C Deel 2**

Algebra - Analytische meetkunde - Waarschijnlijkheidsrekenen

4 vragen - 3 uur

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers zijn wel toegestaan.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	4	5	6	5	20

Vraag 1 .... 4 punten

We noemen k het enige reële getal dat voldoet aan de volgende twee voorwaarden:

$$0 < k < 1 \qquad \text{en} \qquad k^3 + k = 1.$$

(a) (1 punt) Schrijf k^4 als een kwadratische uitdrukking, dat wil zeggen een uitdrukking van de vorm ak^2+bk+c, waarbij a, b en c reële coëfficiënten zijn die moeten worden bepaald. Voor deze en de volgende deelvragen kan men telkens aannemen dat de kwadratische uitdrukking uniek is.

(b) (1 punt) Schrijf $\frac{1}{k}$ als een kwadratische uitdrukking.

(c) (1 punt) Toon aan dat $\frac{1}{1+k}$ gelijk is aan de kwadratische uitdrukking $\frac{1}{3}(k^2 - k + 2)$.

(d) (1 punt) Schrijf het oneindige product

$$(1-k)(1+k^2)(1+k^4)(1+k^8)(1+k^{16})\dots$$

als een kwadratische uitdrukking. Hint: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ als $|x| < 1$.

Vraag 2 .... 5 punten

Teken nauwkeurig in het complexe vlak het gebied dat bestaat uit alle punten z zodat

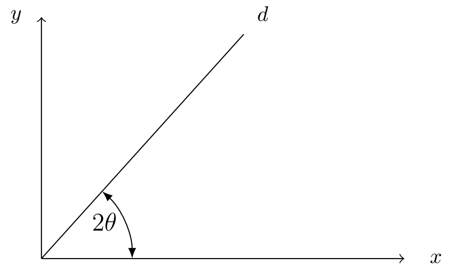
$$\frac{z}{10} \quad \text{en} \quad \frac{10}{\bar{z}}$$

allebei hun reële en imaginaire deel tussen 0 en 1 (inbegrepen) hebben. Hierin stelt $\bar{z}$ de complex toegevoegde van z voor.

Vraag 3 .... 6 punten

Gegeven: een orthonormaal assenstelsel en een rechte d die een hoek 2θ (tussen 0 en $\pi/2$) maakt met de x-as en door de oorsprong gaat (zoals aangegeven op de figuur).

De cirkel C_1 heeft een straal van 1 en de cirkel C_2 heeft een straal van 3. Beide zijn ingesloten tussen de rechten d en de x-as. De cirkels zijn rakend aan beide rechten.



(a) (2 punten) Geef de cartesische vergelijking van de cirkel C_1 in functie van θ.

(b) (2 punten) Bewijs dat de cirkels C_1 en C_2 elkaar raken (op één enkel punt) als $\theta = \frac{\pi}{6}$.

(c) (2 punten) Bereken voor deze waarde van θ de oppervlakte van het gebied begrensd door de x-as, C_1 en C_2.

Vraag 4 .... **5 punten**

Een leraar verdeelt de volgende 16 leerlingen in 8 groepen van twee leerlingen.

Alice	Candice	Emily	Gauthier
Amaury	Cindy	Emma	Giulia
Billie	Denis	Farah	Heidi
Brieuc	Diane	Felix	Helena

(a) (2 punten) Op hoeveel manieren kan hij deze verdeling maken ?
Het antwoord mag producten of faculteiten bevatten.

(b) (1 punt) Op hoeveel manieren kan hij deze verdeling maken als hij wil dat er exact 6 groepen zijn waarvan de namen van beide leerlingen met dezelfde letter beginnen ?

(c) (2 punten) Op hoeveel manieren kan hij deze verdeling maken als hij wil dat de namen van de twee leerlingen in de 8 groepen met dezelfde of opeenvolgende letters van het alfabet beginnen?
Hint: de toegelaten groepen voor de eerste twee leerlingen kunnen worden bepaald, en vervolgens kan deze procedure worden herhaald met de resterende leerlingen.