1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers zijn wel toegestaan.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	4	5	6	5	20

Vraag 1 .... 4 punten

We noemen k het enige reële getal dat voldoet aan de volgende twee voorwaarden:

$$0 < k < 1 \qquad \text{en} \qquad k^3 + k = 1.$$

(a) (1 punt) Schrijf k^4 als een kwadratische uitdrukking, dat wil zeggen een uitdrukking van de vorm ak^2+bk+c, waarbij a, b en c reële coëfficiënten zijn die moeten worden bepaald. Voor deze en de volgende deelvragen kan men telkens aannemen dat de kwadratische uitdrukking uniek is.

We maken gebruik van de tweede voorwaarde $k^3 = 1 - k$:

$$k^4 = kk^3 = k(1-k) = -k^2 + k.$$

(b) (1 punt) Schrijf $\frac{1}{k}$ als een kwadratische uitdrukking.

We delen elk lid van de tweede voorwaarde door k. Dat geeft:

$$\frac{1}{k} = k^2 + 1$$

wat een kwadratische uitdrukking is.

(c) (1 punt) Toon aan dat $\frac{1}{1+k}$ gelijk is aan de kwadratische uitdrukking $\frac{1}{3}(k^2 - k + 2)$.

Als

$$\frac{1}{1+k} = ak^2 + bk + c$$

dan

$$1 = ak^3 + (a+b)k^2 + (b+c)k + k$$

en met behulp van de voorwaarde $k^3 = 1 - k$ vinden we

$$1 = (a+b)k^2 + (-a+b+c)k + (c+a).$$

Omdat de kwadratische uitdrukking uniek is, kunnen de coëfficiënten geïdentificeerd worden, wat leidt tot een stelsel van drie vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
&(k^0) \qquad 1 = c + a\\
&(k^1) \qquad 0 = -a + b + c\\
&(k^2) \qquad 0 = a + b
\end{aligned}$$

waarvan de unieke oplossing gegeven wordt door $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$.

(d) (1 punt) Schrijf het oneindige product

$$(1-k)(1+k^2)(1+k^4)(1+k^8)(1+k^{16})\dots$$

als een kwadratische uitdrukking. Hint: $1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots = \frac{1}{1-x}$ als $|x|<1$.

Om een idee te krijgen, bereken je het product van de eerste twee factoren:

$$(1-k)(1+k^2) = 1-k+k^2-k^3.$$

Vervolgens wordt het product van de eerste drie factoren berekend:

$$\begin{aligned}(1-k)(1+k^2)(1+k^4) &= (1-k+k^2-k^3)(1+k^4)\\ &= 1-k+k^2-k^3+k^4(1-k+k^2-k^3)\\ &= 1-k+k^2-k^3+k^4-k^5+k^6-k^7.\end{aligned}$$

We merken dat het oneindige product geschreven kan worden als

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-k)^m.$$

Dit is een meetkundige reeks van reden $-k$. Omdat $|-k|<1$, convergeert deze reeks en is de som ervan

$$\frac{1}{1-(-k)} = \frac{1}{1+k}.$$

De kwadratische uitdrukking is gegeven in de vorige deelvraag.

Vraag 2 .... **5 punten**

Teken nauwkeurig in het complexe vlak het gebied dat bestaat uit alle punten z zodat

$$\frac{z}{10} \quad \text{en} \quad \frac{10}{\bar{z}}$$

allebei hun reële en imaginaire deel tussen 0 en 1 (inbegrepen) hebben. Hierin stelt $\bar{z}$ de complex toegevoegde van z voor.

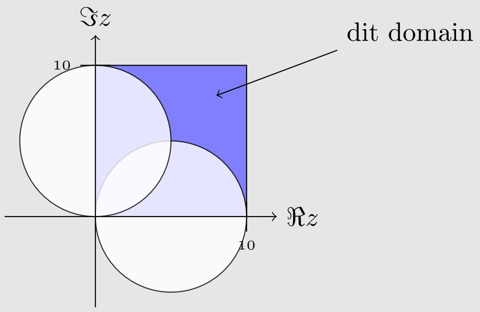
Stel $z=a+bi\neq 0$. Dan $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{z}{\bar{z}z} = \dfrac{z}{|z|^2}$.

$$\begin{array}{lll}(1) & \Re(z/10)\in[0,1] \iff a\in[0,10]\\ (2) & \Im(z/10)\in[0,1] \iff b\in[0,10]\\ (3) & \Re(10/\bar{z})\in[0,1] \iff 10\dfrac{a}{a^2+b^2}\in[0,1]\\ (4) & \Im(10/\bar{z})\in[0,1] \iff 10\dfrac{b}{a^2+b^2}\in[0,1]\end{array}$$

We beschouwen (3) en (4).

$$(3) \iff a \geq 0 \quad \text{en} \quad a^2 + b^2 \geq 10a$$
$$\iff a \geq 0 \quad \text{en} \quad (a-5)^2 + b^2 \geq 5^2.$$

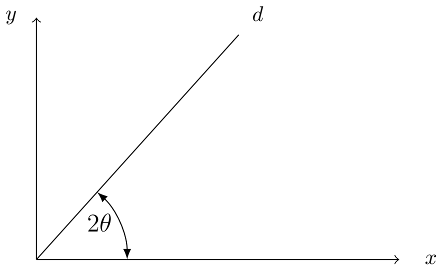
$$(4) \iff b \geq 0 \quad \text{en} \quad a^2 + b^2 \geq 10b$$
$$\iff b \geq 0 \quad \text{en} \quad a^2 + (b-5)^2 \geq 5^2.$$



Vraag 3 .... 6 punten

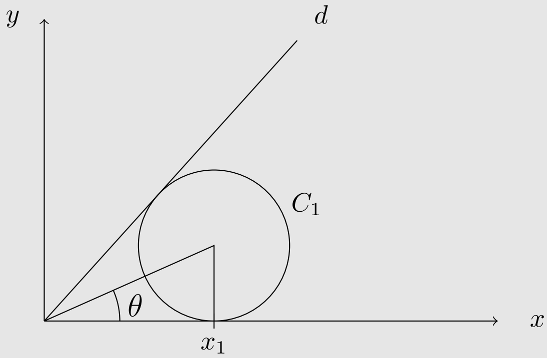
Gegeven: een orthonormaal assenstelsel en een rechte d die een hoek 2θ (tussen 0 en $\pi/2$) maakt met de x-as en door de oorsprong gaat (zoals aangegeven op de figuur).

De cirkel C_1 heeft een straal van 1 en de cirkel C_2 heeft een straal van 3. Beide zijn ingesloten tussen de rechten d en de x-as. De cirkels zijn rakend aan beide rechten.



(a) (2 punten) Geef de cartesische vergelijking van de cirkel C_1 in functie van θ.

Zij x_1 de abscis van het snijpunt tussen C_1 en de x-as, zoals hieronder weergegeven.



Gezien $\tan\theta = \frac{1}{x_1}$, het middelpunt van de cirkel C_1 heeft als coördinaten

$$(x_1, 1) = \left(\frac{1}{\tan\theta}, 1\right).$$

De vergelijking van de cirkel is

$$\left(x - \frac{1}{\tan\theta}\right)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

(b) (2 punten) Bewijs dat de cirkels C_1 en C_2 elkaar raken (op één enkel punt) als $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Zij x_2 de abscis van het snijpunt tussen C_2 en de x-as. Met behulp van Pythagoras op de rechthoekige driehoek hieronder vinden we

$$(x_2 - x_1)^2 + (3-1)^2 = (3+1)^2 \iff (x_2 - x_1)^2 = 12$$

waaruit blijkt dat $x_2 - x_1 = 2\sqrt{3}$. De driehoeken met hoekpunten

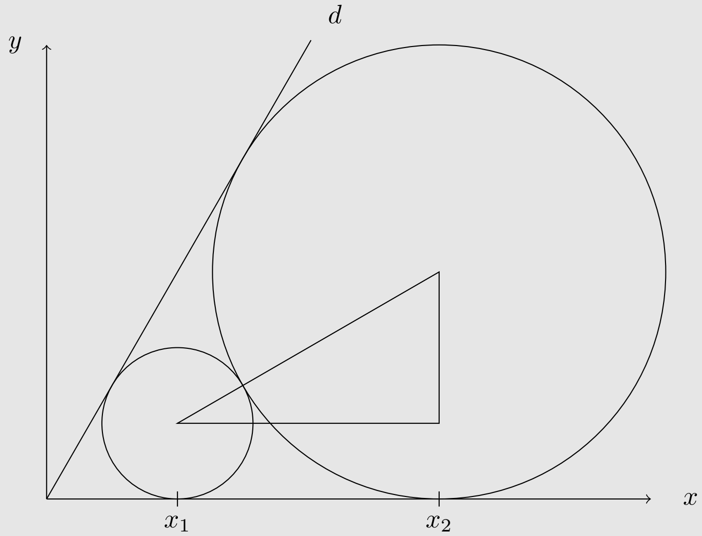
$$(0,0), (x_1, 0), (x_1, 1) \qquad \text{en} \qquad (0,0), (x_2, 0), (x_2, 3)$$

zijn gelijkvormig omdat ze dezelfde hoek θ delen en beide een rechte hoek hebben. Door gelijkvormigheid,

$$\frac{3}{1} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Daaruit $x_2 = 3x_1$ en dus $2\sqrt{3} = x_2 - x_1 = 2x_1$. Daarom

$$\tan\theta = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$



(c) (2 punten) Bereken voor deze waarde van θ de oppervlakte van het gebied begrensd door de x-as, C_1 en C_2.

De tussenliggende oppervlakte is de oppervlakte van een trapezium min de oppervlakte van twee cirkelsectoren. De oppervlakte van het trapezium gevormd door de hoekpunten

$$(x_1, 0), (x_2, 0), (x_2, 3), (x_1, 1)$$

wordt gegeven door

$$\frac{3+1}{2}\frac{2}{\tan\theta} = \frac{4}{\tan\theta}.$$

De sector C_1 heeft oppervlakte

$$\frac{1}{2}1^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}.$$

en de sector C_2 heeft oppervlakte

$$\frac{1}{2}3^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{9\pi}{4} - \frac{9\theta}{2}.$$

De tussenliggende oppervlakte is dus

$$\frac{4}{\tan\theta} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) - \left(\frac{9\pi}{4} - \frac{9\theta}{2}\right) = \frac{4}{\tan\theta} - \frac{5\pi}{2} + 4\theta = 4\sqrt{3} - 11\frac{\pi}{6}.$$

Vraag 4 . . . . 5 punten

Een leraar verdeelt de volgende 16 leerlingen in 8 groepen van twee leerlingen.

Alice	Candice	Emily	Gauthier
Amaury	Cindy	Emma	Giulia
Billie	Denis	Farah	Heidi
Brieuc	Diane	Felix	Helena

(a) (2 punten) Op hoeveel manieren kan hij deze verdeling maken ?
Het antwoord mag producten of faculteiten bevatten.

Methode 1 : $15 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 (= 2\,027\,025)$

Om elke nieuwe groep te vormen: neem de eerste leerling van de lijst van overgebleven leerlingen, en kies willekeurig een andere leerling van deze lijst.

Methode 2 : $\dfrac{16!}{8!\,2^8} (= 2\,027\,025)$

Alle mogelijke permutaties, en groepeer de eerste twee van de permutatie, dan de volgende twee, enzovoort. Deel door 2^8 om de volgorde binnen de paren te negeren, en deel door 8! omdat de volgorde van de paren er niet toe doet.

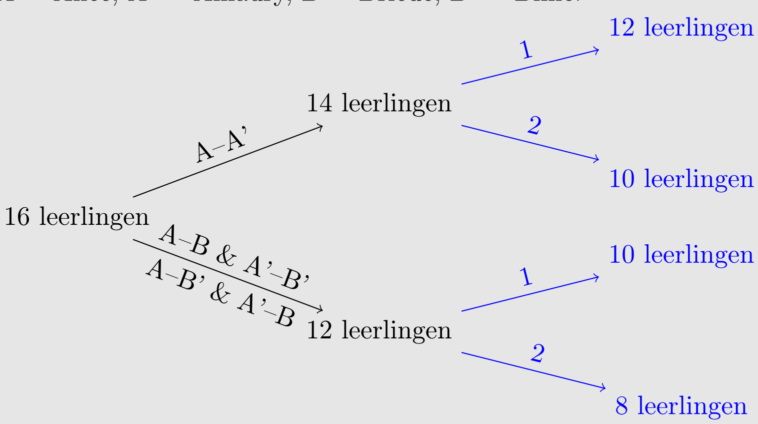
(b) (1 punt) Op hoeveel manieren kan hij deze verdeling maken als hij wil dat er exact 6 groepen zijn waarvan de namen van beide leerlingen met dezelfde letter beginnen ?

$\binom{8}{6} \times 2 = 14$. Kies 6 letters uit 8 letters (één manier om die 12 leerlingen te groeperen), en twee manieren om de resterende 4 leerlingen te groeperen door identieke beginletters te vermijden.

(c) (2 punten) Op hoeveel manieren kan hij deze verdeling maken als hij wil dat de namen van de twee leerlingen in de 8 groepen met dezelfde of opeenvolgende letters van het alfabet beginnen?

Hint: de toegelaten groepen voor de eerste twee leerlingen kunnen worden bepaald, en vervolgens kan deze procedure worden herhaald met de resterende leerlingen.

A = Alice, A' = Amaury, B = Brieuc, B' = Billie.



$x_n = \#$ verdelingen met een lijst van n resterende leerlingen.

$$
\begin{aligned}
x_{16} &= x_{14} + 2x_{12} \\
&= (x_{12} + 2x_{10}) + 2(x_{10} + 2x_8) = x_{12} + 4x_{10} + 4x_8 \\
&= (x_{10} + 2x_8) + 4(x_8 + 2x_6) + 4(x_6 + 2x_4) = x_{10} + 6x_8 + 12x_6 + 8x_4 \\
&= (x_8 + 2x_6) + 6(x_6 + 2x_4) + 12(x_4 + 2x_2) + 8x_4 = x_8 + 8x_6 + 32x_4 + 24x_2 \\
&= (x_6 + 2x_4) + 8(x_4 + 2x_2) + 32x_4 + 24x_2 = x_6 + 42x_4 + 40x_2 \\
&= (x_4 + 2x_2) + 42x_4 + 40x_2 = 43x_4 + 42x_2
\end{aligned}
$$

$x_2 = 1$, $x_4 = 3$

$$= 129 + 42 = 171.$$