2023 | **Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL**
Algèbre - Géométrie analytique - Probabilités
4 questions - 3 heures | **Série A Partie 2**

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	5	5	5	5	20

Question 1 .... **5 points**

(a) (2 points) Trouver un polynôme $p(x)$ de degré 4 et dont le coefficient du terme constant vaut 0, et qui est tel que $p(x) - p(x-1) = x^3$.

On écrit $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$. La condition est

$$p(x) - p(x-1) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - \big(a(x-1)^4 + b(x-1)^3 + c(x-1)^2 + d(x-1)\big) = x^3.$$

Identification des coefficients:

$$\begin{array}{ll} (x^4) & a - a = 0 \\ (x^3) & b - 4a + b = 1 \\ (x^2) & c - 6a + 3b - c = 0 \\ (x^1) & d + 4a - 3b + 2c - d = 0 \\ (x^0) & -a + b - c + d = 0 \end{array}$$

De là

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{4}, \quad d = 0.$$

Donc

$$p(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2.$$

(b) (1 point) En utilisant la sous-question **(a)** calculer $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3$.

$$\begin{aligned} 1^3 &= p(1) - p(0) \\ 2^3 &= p(2) - p(1) \\ 3^3 &= p(3) - p(2) \\ &\vdots \\ 99^3 &= p(99) - p(98) \\ 100^3 &= p(100) - p(99). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3 &= p(100) - p(0) = p(100) \\ &= \frac{1}{4}100^4 + \frac{1}{2}100^3 + \frac{1}{4}100^2 \\ &= 25\,000\,000 + 500\,000 + 2\,500 = 25\,502\,500. \end{aligned}$$

(c) (2 points) Calculer la somme

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + 199^2.$$

Indication: on pourra reproduire la méthode des sous-questions **(a)** et **(b)**. La première étape sera de déterminer un polynôme de degré 3 approprié.

On doit trouver un polynôme $q(x)$ tel que

$$q(x) - q(x-1) = (2x-1)^2.$$

Une fois qu'on a trouvé $q(x)$, la somme est donnée par

$$q(1) - q(0) + q(2) - q(1) + q(3) - q(2) + q(4) - q(3) + \ldots + q(100) - q(99) = q(100) - q(0).$$

On prodèce à nouveau par identification pour trouver les coefficients de

$$q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x.$$

Le terme indépendant est libre, on le prend à nouveau égal à zéro.
A partir de $q(x) - q(x-1) = (2x-1)^2$ on déduit les équations suivantes:

$$\begin{array}{ll} (x^3) & \alpha - \alpha = 0 \\ (x^2) & \beta + 3\alpha - \beta = 0 \\ (x^1) & \gamma - 3\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ (x^0) & \alpha - \beta + \gamma = 0 \end{array}$$

De là,

$$\alpha = \frac{4}{3}, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = -\frac{1}{3}.$$

On a donc trouvé $q(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}x$. La somme vaut

$$\begin{aligned} q(100) - q(0) &= q(100) \\ &= \frac{4}{3}(100)^3 - \frac{1}{3}(100) \\ &= \frac{3}{3}(100)^3 + \frac{1}{3}(100^3 - 100) \\ &= 1\,000\,000 + \frac{1}{3}999\ 900 \\ &= 1\,333\,300. \end{aligned}$$

Question 2 . . . . 5 points

Déterminer toutes les valeurs entières de α dans l'intervalle $[0°, 90°]$ telles que $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{20}$ est un nombre réel.

Le nombre donné se trouve dans le plan complexe sur le cercle de rayon 1. Il y a deux cas possibles:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{20} = 1 \qquad \text{ou} \qquad (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{20} = -1.$$

On peut combiner les deux cas en une seule équation:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{40} = 1.$$

Il y a 40 solutions qui sont de la forme

$$\operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{40}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 39.$$

où on rappelle les notations $\operatorname{cis}(x) = \exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$. Vu que $\alpha \in [0°, 90°]$ on ne doit considérer que les valeurs de k telles que

$$0 \leq \frac{2k\pi}{40} \leq \frac{\pi}{2}$$

c'est-à-dire $0 \leq \frac{k}{10} \leq 1$, ou encore $0 \leq k \leq 10$. Les valeurs de α sont données par:

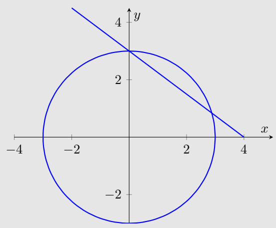
$$\alpha_k = k\frac{\pi}{20}\frac{180°}{\pi} = 9k°, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

Question 3 . . . . **5 points**

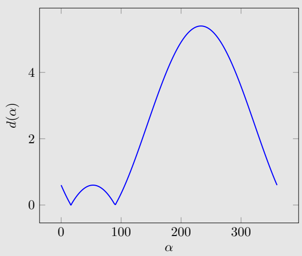
La droite d'équation $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ rencontre le cercle d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$ aux points A et B.

(a) (2 points) Déterminer, en fonction du paramètre $\alpha \in [0, 2\pi]$, la distance entre la droite AB et le point $P(3\cos\alpha, 3\sin\alpha)$.

On commence par un schéma.



On utilisera directement la formule pour la distance point-droite:



$$\begin{aligned} d(\alpha) &= \frac{|3(3\cos\alpha) + 4(3\sin\alpha) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{|9\cos\alpha + 12\sin\alpha - 12|}{5}. \end{aligned}$$

(b) (3 points) Déterminer tous les points P sur le cercle tels que l'aire du triangle PAB est maximale.

L'aire du triangle est donnée par

$$\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}||d(\alpha).$$

Cette aire est maximale lorsque $d(\alpha)$ est maximale. On dérive par rapport à α sans se préoccuper de la valeur absolue, et la dérivée s'annule si

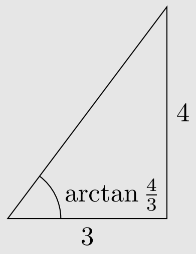
$$\frac{1}{5}\left(-9\sin\alpha + 12\cos\alpha\right),$$

ce qui donne

$$\tan\alpha = \frac{4}{3}.$$

On trouve donc $\alpha = \arctan\frac{4}{3}$ (aire minimale) ou $\alpha = \arctan\frac{4}{3} + \pi$ (aire maximale). Le point correspondant à l'aire maximale est

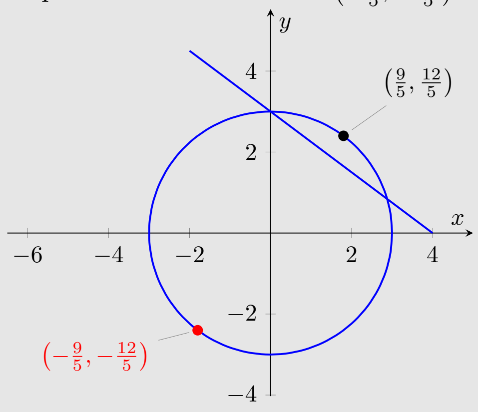
$$\left(3\cos\left(\arctan\frac{4}{3} + \pi\right), 3\sin\left(\arctan\frac{4}{3} + \pi\right)\right) = \left(-3\cos\arctan\frac{4}{3}, -3\sin\arctan\frac{4}{3}\right).$$



On simplifie ensuite l'expression:

$$\cos \arctan \frac{4}{3} = \frac{3}{5}$$
$$\sin \arctan \frac{4}{3} = \frac{4}{5}.$$

Le point recherché est donc $\left(-\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$.



Question 4 . . . . 5 points

Un tournoi d'escrime international à élimination directe compte 64 participants, dont 8 représentants de l'Ecole Royale Militaire (ERM). Dans le tableau des combats (représenté ci-dessous) le premier tour est rempli complètement au hasard.

(a) (1 point) Montrer qu'il y a 105 façons de répartir 8 personnes en 4 groupes de 2 personnes, si l'ordre des groupes et l'ordre au sein des groupes n'ont pas d'importance.

- On place les 8 personnes sur une rangée. Il y a 8! possibilités.
- On fait un groupe avec les deux premiers, puis un autre groupe avec les deux suivants, et ainsi de suite.
- Comme l'ordre au sein des groupes n'a pas d'importance, on doit diviser 8! par 2^4. Comme l'ordre

des groupes n'a pas d'importance, on doit encore diviser par 4!.

La réponse à la question est

$$\frac{8!}{4!\,2^4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{16} = 7 \times 3 \times 5 = 105.$$

(b) (2 points) Quelle est la probabilité qu'aucun combat n'oppose deux représentants de l'ERM au premier tour ?

- Première méthode

  Cas possibles. En suivant le raisonnement de la sous-question **(a)**, on trouve

  $$\frac{64!}{32!\,2^{32}}$$

  possibilités pour déterminer quels seront les combats du premier tour (sans tenir compte de la suite de la compétition).

  Cas favorables. On suppose que l'on a classé les représentants de l'ERM du 1er au 8e.

  – Il y a 56 adversaires possibles pour le premier représentant de l'ERM, et 55 adversaires possibles pour le suivant, jusqu'à 49 adversaires possibles pour le 8e représentant de l'ERM: on trouve donc

  $$56 \times 55 \times \ldots \times 49 = \frac{56!}{48!}$$

  façons de choisir les adversaires des représentants de l'ERM.

  – Il reste ensuite 48 participants, que l'on groupe deux par deux, et il y a comme précédemment

  $$\frac{48!}{24!\,2^{24}}$$

  façons de les grouper.

  Dès lors,

  $$\#\text{ cas favorables} = \frac{56!}{24!\,2^{24}}.$$

  Réponse. La réponse à la question est donc

  $$\frac{\#\text{ cas favorables}}{\#\text{ cas possibles}} = \frac{56!\,32!\,2^{32}}{64!\,24!\,2^{24}} = \frac{(32 \times 31 \times \ldots \times 25)2^8}{64 \times 63 \times \ldots \times 57}.$$

- Seconde méthode

  On compte les cas favorables et les cas possibles en considérant que l'ordre des groupes, et l'ordre au sein des groupes ont de l'importance.

  Cas possibles. Il y a 64! façons de remplir le tableau.

  Cas favorables. – Pour le premier membre de l'ERM, il y a 64 places. Pour le second, 62 places (comme il ne peut pas être opposé au premier). Pour le troisième, il y a 60 possibilités, et ainsi de suite jusqu'à 50 possibilités pour placer le 8e membre.

  – Il y a 56! façons de placer les 56 participants restants dans les 56 places restantes.

  Réponse. La probabilité est

  $$\frac{\#\text{ cas favorables}}{\#\text{ cas possibles}} = \frac{(64 \times 62 \times \ldots \times 50)56!}{64!} = \frac{(32 \times 31 \times \ldots \times 25)2^8}{64 \times 63 \times \ldots \times 57}.$$

(c) (2 points) Quelle est la probabilité que les représentants de l'ERM ne puissent pas s'affronter avant les quarts de finale ?

Il faut que pami les 8 premières places du tableau de départ il y ait un membre de l'ERM et 7 autres compétiteurs, puis à nouveau un membre de l'ERM et 7 autres compétiteurs dans les 8 places suivantes, et ainsi de suite.

- Première méthode

  Cas possibles. On répartit les 64 participants en 8 groupes de 8, sachant que l'ordre des groupes et l'ordre au sein des groupes ne sont pas importants. Le nombre de possibilités est

$$\frac{64!}{8!(8!)^8} = \frac{64!}{(8!)^9}.$$

On a divisé par 8! parce que l'ordre des groupes n'est pas important, et on a divisié par $(8!)^8$ parce que l'ordre au sein des groupes n'est pas important.

Cas favorables. On répartit les 8 représentants de l'ERM dans les différents groupes, ce qui se fait de 8! manières différentes. Il reste à répartir les 56 autres participants entre ces 8 morceaux de tableau. Il y a $\frac{56!}{(7!)^8\,8!}$ façons de le faire. On divise par $(7!)^8$ pour ne pas tenir compte de l'ordre au sein des groupes, et on divise par 8! vu que l'ordre des groupes n'est pas important. Le nombre de cas favorables est donc

$$\#\text{ cas favorables} = \frac{8!\,56!}{(7!)^8\,8!} = \frac{56!}{(7!)^8}.$$

Réponse. La probabilité recherchée est donc

$$\frac{56!}{(7!)^8}\frac{(8!)^9}{64!} = \frac{56!\,8!}{64!}8^8.$$

- Seconde méthode
  On compte les cas favorables et les cas possibles en considérant que l'ordre des groupes, et l'ordre au sein des groupes ont de l'importance.

  Cas possibles. Il y a 64! façons de remplir le tableau de départ.

  Cas favorables.
  – Il y a 8! façons de placer les représentants de l'ERM dans les 8e de tableau. Dans chaque 8e de tableau il y a 8 places possibles pour le représentant de l'ERM. Il y a donc $8!\,8^8$ façons de placer les 8 représentants.
  – Pour les autres compétiteurs, il reste 56 places vides. Il y a 56! façons de les remplir.

  Dès lors,
  $$\#\text{ cas favorables } = 56!8!\,8^8.$$

  Réponse. La probabilité est: $\frac{56!\,8!}{64!}8^8$.