Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL

2023 | Analyse - Trigonométrie - Géométrie | **Série A Partie 1**

4 questions - 3 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	5	5	5	5	20

Question 1 . . . . **5 points**

La fonction g est donnée par

$$g(x) = \int_{-1}^{1} f(u)|x-u|du,$$

où $x \in]-1,1[$ et f est une fonction continue telle que $f(0) = 1$. (On notera que $|x-u|$ désigne la valeur absolue de $x-u$.)

(a) (3 points) Montrer que la dérivée de g est donnée par :

$$g'(x) = \int_{-1}^{x} f(u)du - \int_{x}^{1} f(u)du.$$

Pour $-1 < x < 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-1}^{x} f(u)(x-u)du + \int_{x}^{1} f(u)(u-x)du \\ &= x\int_{-1}^{x} f(u)du - \int_{-1}^{x} f(u)udu + \int_{x}^{1} uf(u)dx - x\int_{x}^{1} f(u)du. \end{aligned}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_{-1}^{x} f(u)du + xf(x) - xf(x) - xf(x) - \int_{x}^{1} f(u)du + xf(x) \\ &= \int_{-1}^{x} f(u)du - \int_{x}^{1} f(u)du. \end{aligned}$$

(b) (2 points) Déterminer la dérivée seconde de la fonction g en $x = 0$.

$g''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$ et donc $g''(0) = 2f(0) = 2$.

Question 2 . . . . **5 points**

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ en commençant par le changement de variable $x = \pi - y$.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-y)\sin(\pi-y)}{1+\cos^2(\pi-y)}(-dy)$$

$\sin(\pi - y) = \sin y, \quad \cos(\pi - y) = -\cos y$

$$= \pi \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{1+\cos^2(y)} dy - \int_0^\pi \frac{y\sin(y)}{1+\cos^2(y)} dy$$

$z = \cos y$

$$\begin{aligned} &= -\pi \int_1^{-1} \frac{1}{1+z^2} dz - I \\ &= \pi \left[\arctan(z)\right]_{-1}^{1} - I \\ &= \pi \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) - I. \end{aligned}$$

De là

$$2I = \frac{\pi^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi^2}{4}.$$

Question 3 . . . . 5 points

On donne la fonction

$$f(x) = \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \quad \forall x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right].$$

(a) (3 points) Si $g(x) = -x - \dfrac{\pi}{6}$ et $h(x) = \dfrac{2}{\sin 2x} + \cos x$, montrer que $f(x) = h(g(x))$.

Méthode 1 (en utilisant la fonction $\cot = \frac{1}{\tan}$**)** Vu l'indentité $\tan\alpha = \cot(\pi/2 - \alpha)$, on a

$$\tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{2\pi}{3})\right) = \cot\left(-x - \frac{\pi}{6}\right).$$

En remarquant que tan est impaire et cos est paire, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x) &= \cot(g(x)) + \tan(g(x)) + \cos(g(x)) \\ &= \frac{\cos(g(x))}{\sin(g(x))} + \frac{\sin(g(x))}{\cos(g(x))} + \cos(g(x)) \\ &= \frac{2(\cos^2(g(x)) + \sin^2(g(x)))}{2\sin(g(x))\cos(g(x))} + \cos(g(x)) \\ &= \frac{2}{\sin(2g(x))} + \cos(g(x)) \\ &= h(g(x)). \end{aligned}$$

Méthode 2 (sans utiliser la fonction cot**)** On obtient d'abord une expression pour $h(g(x))$:

$$h(g(x)) = \frac{2}{\sin\left(-2x - \frac{2\pi}{6}\right)} + \cos\left(-x - \frac{\pi}{6}\right).$$

On écrit ensuite $f(x)$ uniquement avec des sinus et des cosinus:

$$f(x) = \frac{\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)} - \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Comme la fonction cos est paire, le dernier terme dans l'expression de $h(g(x))$ est égal au dernier terme de $f(x)$. On doit vérifier que

$$\frac{2}{\sin\left(-2x - \frac{2\pi}{6}\right)} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)} - \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

On regarde le membre de droite et on commence par une mise au même dénominateur:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)} - \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} &= \frac{\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}-x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+\cos\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)}
\end{aligned}$$

en utilisant l'identité $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x-\frac{5\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{2}{\sin\left(-2x-\frac{2\pi}{6}\right)}.
\end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait obtenir.

(b) (2 points) A l'aide du point précédent, déterminer la plus grande valeur atteinte par f sur le domaine donné.

On a $x \in \left[-\dfrac{5\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{3}\right]$ et donc

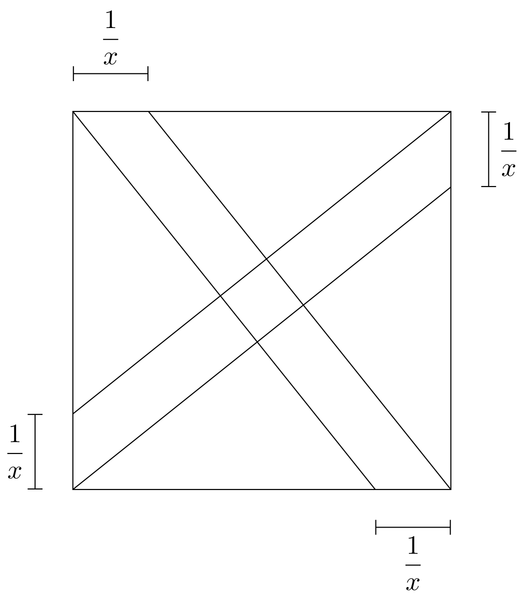
- on voit $g(x) \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ et sur ce domaine la fonction cos est décroissante;
- on voit $2g(x) \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sur ce domaine la fonction $\frac{1}{\sin}$ est décroissante.

La plus grande valeur de f sur le domaine donné est donc égale à la valeur de h évaluée en $g(x) = \frac{\pi}{6}$:

$$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11}{6}\sqrt{3}.$$

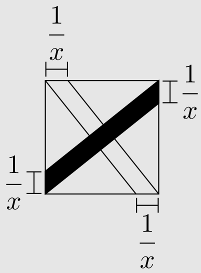
Question 4 .... 5 points

A l'intérieur d'un carré d'aire égale à 1, on construit un plus petit carré en reliant chaque sommet à un point du carré qui se trouve à une distance $\frac{1}{x}$ du sommet opposé, comme indiqué sur le dessin.



Déterminer la valeur de x si le petit carré à l'intérieur a une aire égale à $\frac{1}{221}$.

On note A l'aire du parallélogramme colorié sur la figure:



On peut appliquer la formule de l'aire du parallélogramme de deux façons différentes:

$$A = \text{base} \times \text{ hauteur} = \frac{1}{x}1 = \sqrt{1^2 + (1 - 1/x)^2}\frac{1}{\sqrt{221}},$$

avec dans la dernière expression, la hauteur qui est donnée par le côté du petit carré.

On obtient une équation quadratique $x^2 - x - 110 = 0$ dont le discriminant vaut $441 = 21^2$. Les solutions sont $x = 11$ ou $x = -10$ (à rejeter).