Exercice 1

Soient :

- v_1 : le nombre de moineaux en 2022.
- v_2 : le nombre de pigeons ramiers en 2022.
- v_3 : le nombre de merles en 2022.
- v_4 : le nombre de pinsons en 2022.

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1,44 \cdot (4760 + 3840 + 7720 + 6680)$$
$$v_3 = 1,3 \cdot 7720, \quad v_4 = 1,3 \cdot 6680, \quad 2v_2 = v_1$$
$$\Leftrightarrow 3v_2 = 14400$$
$$\Leftrightarrow v_2 = 4800$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{v}_1 = 9600}$$

On aura 9600 moineaux en 2022.

Exercice 2

- $\underline{1^{er} cas}$: $x < 0$

$$-x^2 \geq -4x - 5$$
$$0 \geq (x+1)(x-5)$$

x (<0)		-1		0
(x+1)(x-5)	+	0	-	-

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{x=-1}}$$

- $\underline{2^{e} cas}$: $x \geq 0$

$$-x^2 \geq 4x - 5$$
$$0 \geq (x-1)(x+5)$$

x (≥0)	0		1	
(x-1)(x+5)	-	-	0	+

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{x=}\{0,1\}}$$

On a au total **3** nombres entiers qui sont solutions de $-x^2 \geq |4x| - 5$.

Exercice 3

Un nombre est rationnel lorsqu'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers.

- $(-36)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-36}} \notin \mathbb{Q}$
- $(27)^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 9 \in \mathbb{Q}$
- $(25)^{\frac{-3}{2}} = (5^2)^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{125} \in \mathbb{Q}$
- $(12)^{\frac{0}{1}} = 1 \in \mathbb{Q}$
- $(16)^{\frac{4}{3}} = (2^3 \cdot 2)^{\frac{4}{3}} = 2^5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^5 \cdot \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$
- $(16)^{\frac{5}{4}} = (2^4)^{\frac{5}{4}} = 2^5 = 32 \in \mathbb{Q}$
- $(30)^{\frac{3}{4}} = (2 \cdot 5 \cdot 3)^{\frac{3}{4}} \notin \mathbb{Q}$

Donc, on a au total **3** nombres qui ne sont pas des rationnels.

Exercice 4

- $a > 0 \Leftrightarrow f$ est concave vers le haut $\Leftrightarrow$ graphes (C) et (E) incorrectes.
- $c < 0 \Leftrightarrow f$ croise l'axe des y en-dessous de l'axe des x. $\Leftrightarrow$ graphes (A) et (D) incorrectes.
  Une autre manière de montrer que les graphes (A) et (D) sont incorrectes, est de calculer le discriminant. $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow f$ dispose de deux racines distinctes $\Leftrightarrow$ graphes (A) et (D) incorrectes.

$\Rightarrow$ graphe (B) est le seul graphe possible de f.

Exercice 5

On est au-dessus de l'axe des x en $x = a \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{f(a)>0}}$.

La pente est décroissante en $x = a \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{f'(a)<0}}$.

La variation de la pente dans les alentours de $x = a$ est positive $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{f''(a)>0}}$.

Exercice 6

(A) $\log(3^2) = 2\log(3) \neq (\log(3))^2$

(B) $\log(10^2)\log(2) = 2\log(2) = \log(4)$

(C) $\log(6) = \log(2) + \log(3) \neq \log(2)\log(3)$

(D) $\log(5) \neq \log(2)\log(3)$

$\Rightarrow$ affirmations (A), (C) et (D) sont à biffer.

Exercice 7

$$\frac{1}{4} < \Big(\overbrace{(|\cos x|)^2}^{=(\cos x)^2}\Big) < \frac{3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} & < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & < \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

x appartient à $[0, 2\pi]$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}, & \text{ou} \quad \frac{5\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{6} \\ \frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}, & \text{ou} \quad \frac{7\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} < 2x < \frac{2\pi}{3} & \Rightarrow \text{quadrants 1 et 2} \quad \text{ou} \quad \frac{4\pi}{3} < 2x < \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \text{quadrants 3 et 4} \\ \frac{4\pi}{3} < 2x < \frac{5\pi}{3} & \Rightarrow \text{quadrants 3 et 4} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{3} < 2x < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \text{quadrants 1 et 2} \end{cases}$$

Aucun quadrant n'est à biffer.

Exercice 8

Le cercle est de centre $(-5-k, 3-k)$.
La distance le séparant de l'axe des x est $|3-k| \leq 4$

$$\Leftrightarrow -4 \leq 3-k \leq 4$$
$$\Leftrightarrow -1 \leq k \leq 7$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\text{k=-1}}$$

Exercice 9

$f'(x) = 0 = 4x - 6 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$

Exercice 10

Chercher la plus grande valeur positive de $x < 1$ de:

$$2\sin(\frac{x\pi}{2}) \leq \sqrt{3}$$

revient à déterminer la solution de:

$$2\sin(\frac{x\pi}{2}) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$$

Exercice 11

P_i est la probabilité que les 3 dés répondent aux chiffres indiqués par le tableau ci-dessous. Les lignes du tableau représentent tous les cas où le nombre du dé n°3 est strictement supérieur à la somme de ceux des dés n°1 et 2.

D_1	D_2	D_3	P_i
1	1	3,4,5,6	$\frac{4}{6^3}$
1	2	4,5,6	$\frac{3}{6^3}$
1	3	5,6	$\frac{2}{6^3}$
1	4	6	$\frac{1}{6^3}$
2	1	4,5,6	$\frac{3}{6^3}$
2	2	5,6	$\frac{2}{6^3}$
2	3	6	$\frac{1}{6^3}$
3	1	5,6	$\frac{2}{6^3}$
3	2	6	$\frac{1}{6^3}$
4	1	6	$\frac{1}{6^3}$

$P_t = \sum P_i = \frac{20}{6^3} = \frac{5}{54}$, où P_t est la somme des probabilités P_i.

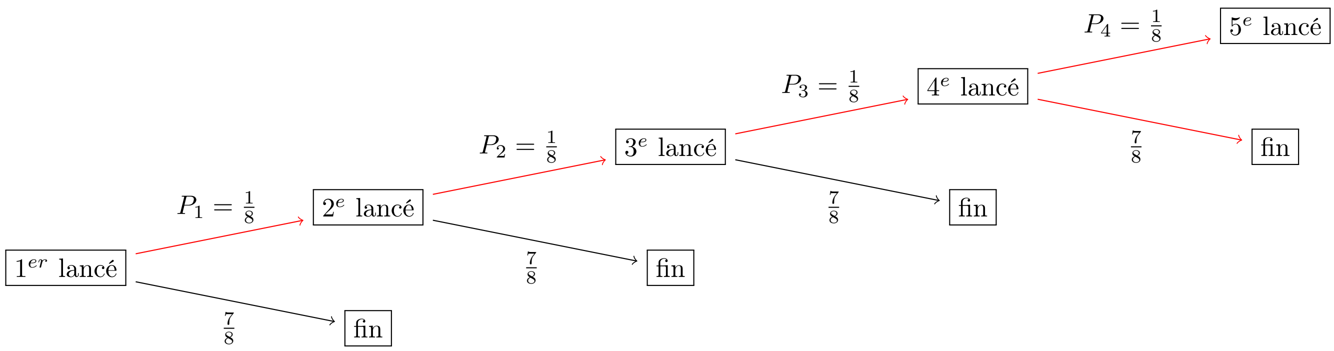
Etant donné que l'ordre des dés n'a pas d'importance, la probabililté est de $\boxed{\mathrm{P}_t = 3 \cdot \frac{5}{54} = \frac{5}{18}}$

Exercice 12

Probabilité d'avoir un nombre inférieur à 4 pour un dé lancé : $\frac{1}{2}$

Probabilité d'avoir un nombre inférieur à 4 pour chaque dé lancé au i^e lancé: $P_i = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

La probabilité de devoir lancer plus de 3 fois est donc:



La propbalité P recherchée est donc :

$$\boxed{P = (\frac{1}{8})^3 \cdot (\frac{1}{8} + \frac{7}{8}) = \frac{1}{512}}$$

Exercice 13

$f(g(2)) = f(2b_2 + 3) = (2b_2 + 3)^2 + 1 = 290$

$\Leftrightarrow 4b_2^2 + 12b_2 + 10 = 290$

$\Leftrightarrow b_2^2 + 3b_2 - 70 = 0$

$\Leftrightarrow \Delta = 9 - 4.1.(-70) = 289 = 17^2$

$\Leftrightarrow b_2 = \frac{-3-17}{2} = -10$ ou $b_2 = \frac{-3+17}{2} = 7$

$\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{b}_2 = -10}$

Exercice 14

$g(x) = f'(x) = -\cos x \cdot (\cos(\frac{x}{2}))^4 + 4\sin x \cdot (\cos(\frac{x}{2}))^3 \cdot \sin(\frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow g(-\frac{\pi}{2}) = 0 - 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^3(\frac{-\sqrt{2}}{2})$

$\Leftrightarrow \boxed{g(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}}$

Exercice 15

$f'(x) = 6x^2 + 2x + c$

$f'(3) = 0 = 60 + c$

$\Leftrightarrow \boxed{\text{c=-60}}$.

Exercice 16

Déterminons C:

$f(-1) = 2 = -5 - 1 - C + 1 = -5 - C$
$\Leftrightarrow C = -7$.

Le produit de pentes de deux droites perpendiculaires en un point vaut -1.

$f'(x) = 15x^2 - 2x - 7$. En $x = 1$, la pente vaut : $f'(1) = 6$.

$\Leftrightarrow 6a = -1$, (la pente de $y = ax + b$ est a)

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$.

Le point $(1, f(1) = -2)$ appartient à la droite $y = ax + b$.

$\Leftrightarrow \boxed{\text{-2=a+b}}$.

Exercice 17

$-32 = \int_{-k}^{k}(-\frac{6}{k}x^2+3x+k)\mathrm{d}x = 2\int_0^k(-\frac{6}{k}x^2+k)\mathrm{d}x,\quad$ (les fonctions $3x$ et $-\frac{6}{k}x^2+k$ sont respectivement impaire et paire).

$\Leftrightarrow -32 = 2[-\frac{2}{k}x^3 + kx]_0^k$

$\Leftrightarrow k = \pm 4, \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{k=4}}$

Exercice 18

$2 = \int_0^{2\pi} 2k\cos(kx+\pi)\mathrm{d}x$

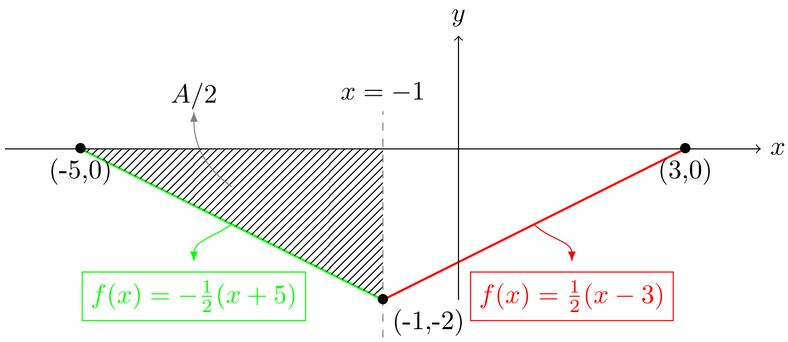
$\Leftrightarrow 1 = [\sin(kx+\pi)]_0^{2\pi}$

$\Leftrightarrow 1 = \sin(2\pi k + \pi)$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2m\pi = 2\pi k + \pi, \quad m \in \mathrm{Z}$

Pour $m = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{k=-}\frac{1}{4}}$

Exercice 19

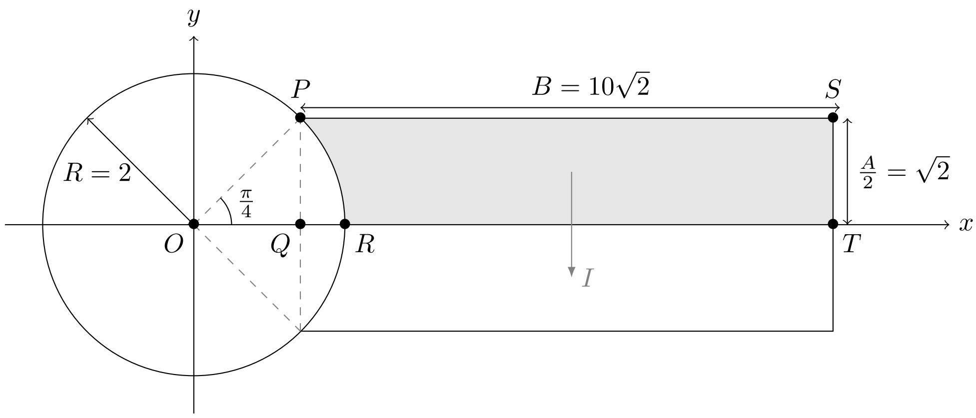


$A = \int_{-5}^{3}(|\frac{1}{2}(x-1)+1|-2)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{3}\frac{1}{2}(x-3)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow A = [\frac{x^2}{2} - 3x]_{-1}^{3} = (\frac{9}{2}-9) - (\frac{1}{2}+3) = -8$

$\Rightarrow$ $\boxed{|\text{A}|\text{=8}}$

Exercice 20



- <u>Aire du rectangle $PQTS$</u>

  $PQTS = \frac{AB}{2} = 20$

- <u>Aire du triangle curviligne OPR</u>

  $OPR = \frac{\pi}{8} * R^2 = \frac{\pi}{2}$

- <u>Aire du triangle OPQ</u>

  $OPQ = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1$

- <u>Aire du triangle curviligne PQR</u>

  $PQR = \frac{\pi}{2} - 1$

$\Leftrightarrow I = \frac{AB}{2} - (\frac{\pi}{2} - 1) = 21 - \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 20I = 20(21 - \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow \boxed{20\mathrm{I} \approx 389\,\mathrm{m}^2}$