Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique
Ecole Royale Militaire

Géométrie Analytique

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 2, Question 4

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- Analyse
- Trigonométrie
- Géométrie

Partie 2 de l'examen

- Algèbre
- Géométrie analytique
  - Equations de droites et de plan dans l'espace
- Probabilités et statistique

Question & solution

On donne les équations cartésiennes de trois droites d_1, d_2, d_3 dans l'espace :

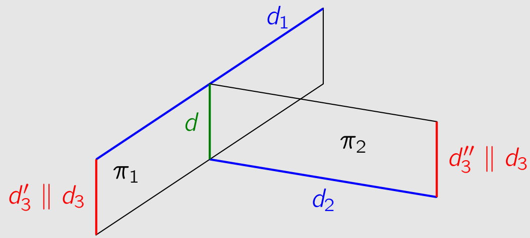
$$d_1 \equiv \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}, \qquad d_2 \equiv \begin{cases} y = x \\ z = 1 \end{cases}, \qquad d_3 \equiv \begin{cases} z = y \\ x = -2 \end{cases}.$$

Déterminer les équations cartésiennes de la droite qui coupe d_1 et d_2, et qui est parallèle à d_3. Commencer par faire un croquis.

- Construire un plan π_1 qui contient d_1 et qui est parallèle à d_3.
- Construire un plan π_2 qui contient d_2 et qui est parallèle à d_3.
- La droite recherchée est donnée par l'intersection des deux plans.

On a besoin de vecteurs directeurs des trois droites.

$$d_1 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d_2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_3 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$



$$d = \pi_1 \cap \pi_2, \quad \pi_1 \perp \vec{n}_1, \quad \pi_2 \perp \vec{n}_2.$$

On veut déterminer $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

$$\begin{cases} (a,b,c)\circ(1,0,1) & = 0 \\ (a,b,c)\circ(0,1,1) & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a+c & = 0 \\ b+c & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \parallel (1,1,-1).$$

$$\begin{cases} (a',b',c')\circ(1,1,0) & = 0 \\ (a',b',c')\circ(0,1,1) & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a'+b' & = 0 \\ b'+c' & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \vec{n}_2 \parallel (1,-1,1).$$

Les deux plans ont pour équation

$$\pi_1 \equiv x+y-z = e, \qquad \pi_2 \equiv x-y+z = e'.$$

En remarquant que $(0,0,0) \in \pi_1$ et $(0,0,1) \in \pi_2$, on détermine complètement les équations des deux plans ($e = 0,\ e' = 1$).

On a donc trouvé que

$$d \equiv \begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x - y + z & = 1 \end{cases} .$$