Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique
Ecole Royale Militaire

Probabilités

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 2, Question 3

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- Analyse
- Trigonométrie
- Géométrie

Partie 2 de l'examen

- Algèbre
- Géométrie analytique
- Probabilités et statistique
  - Combinatoire

Question & solution

Une solution entière positive de l'équation

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r, \quad n \geq 1, \quad r \geq 0,$$

d'inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, s'écrit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont des entiers ordonnés tels que $e_1 + e_2 + \ldots + e_n = r$ et $e_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. On définit de manière analogue la notion de solution entière positive pour une inéquation de la forme

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq r.$$

Par exemple, $(0, 2)$, $(2, 0)$ et $(1, 1)$ sont trois solutions entières positives différentes de l'équation $x_1 + x_2 = 2$, mais ce n'est pas le cas de $(-1, 3)$ ni de $(1/2, 3/2)$.

(a) (2 points) Déterminer le nombre de solutions entières positives de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9.$$

- Distinguer les différentes valeurs possibles pour x_1. On commence par le cas le plus simple, où $x_1 = 9$, car alors il n'y a qu'une seule solution possible: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (9, 0, 0, 0)$.
- Une fois que x_1 est fixé, déterminer les valeurs possibles pour x_2 (et ainsi de suite pour x_3 et x_4).

Dans le tableau, la colonne # Sol. représente le nombre de solutions différentes.

			# Sol.
$x_1 = 9$	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 0$	1
$x_1 = 8$	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 1$	2
$x_1 = 7$	$x_2 = 2$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 1$	2
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 2$	3
$x_1 = 6$	$x_2 = 3$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 2$	$x_3 + x_4 = 1$	2
	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 2$	3
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 3$	4
$x_1 = 5$	$x_2 = 4$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 3$	$x_3 + x_4 = 1$	2
	$x_2 = 2$	$x_3 + x_4 = 2$	3
	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 3$	4
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 4$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Autres lignes du tableau:
On observe que si $x_1 = a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ et $x_2 = b \in \{0, \ldots, 9 - a\}$, alors le nombre de solutions de l'équation $x_3 + x_4 = 9 - a - b$ est donné par $9 - a - b + 1 = 10 - a - b$. En effet, les valeurs possibles pour x_3 sont tous les nombres naturels de 0 à $9 - a - b$, et pour chaque valeur de x_3 il y a une seule valeur possible pour x_4.

Pour trouver le nombre total de solutions, on additionne toutes les valeurs dans la dernier colonne du tableau:

$$1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + \ldots + (1+2+\ldots+10) = 220.$$

(b) (1 point) En déduire le nombre de solutions entières positives de l'inéquation $x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N})$$

Comme pour **(a)**, 220 solutions.

(c) (1 point) De combien de façons différentes peut-on distribuer 9 pièces de 1 euro à Amber, Billie, Candice et Djamel ? Il n'est pas obligatoire que chacun reçoive au moins un euro.

Amber: x_A euros, Billie: x_B euros, Candice: x_C euros, Djamel: x_D euros.
On doit compter les solutions entières positives de l'équation

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 9.$$

(a) $\Rightarrow$ 220 manières différentes.

(d) (2 points) Déterminer le nombre de suites différentes réalisables avec les 12 symboles suivants :

$$\{\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \star, \star, \star\}.$$

Chaque symbole est utilisé exactement une fois. Par exemple,

$$(\bullet, \bullet, \star, \bullet, \star, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \star) \qquad \text{et} \qquad (\star, \bullet, \bullet, \star, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \star, \bullet, \bullet, \bullet)$$

sont deux suites différentes. Les $\bullet$ sont indiscernables entre eux, et les $\star$ aussi.

Choisir 3 positions pour les $\star$ parmi 12 positions:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220.$$

Remarque sur le lien avec **(a)**:

La position des trois symboles $\star$ permet de répartir les symboles $\bullet$ en 4 groupes, ce qui correspond chaque fois à une solution de l'équation en **(a)**. Par exemple,

$$(\underbrace{\bullet,\bullet}_{x_1=2},\star,\underbrace{\bullet}_{x_2=1},\star,\underbrace{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet}_{x_3=6},\star\underbrace{}_{x_4=0}).$$