

# Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique Ecole Royale Militaire

## Algèbre

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 2, Question 2

### Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- ▶ Analyse
- ▶ Trigonométrie
- ▶ Géométrie

Partie 2 de l'examen

- ▶ Algèbre
  - Nombres complexes
- ▶ Géométrie analytique
- ▶ Probabilités et statistique
  - Probabilité d'un événement, combinatoire

## Question & solution

On choisit au hasard deux solutions  $z_1$  et  $z_2$  différentes de l'équation dans  $\mathbb{C}$

$$z^{12} - 1 = 0.$$

- (a) (2 points) Commencer par donner toutes les solutions de cette équation sous leur forme  $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ . Représenter ces solutions dans le plan complexe.



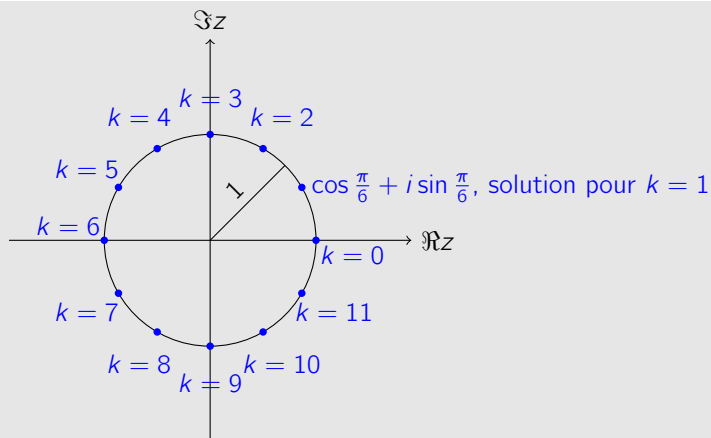
- ▶ Notation:  $\rho \operatorname{cis}(\theta) = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$ .
- ▶  $1 = \operatorname{cis}(2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- ▶ De Moivre:

$$(\rho \operatorname{cis}(\theta))^{12} = \rho^{12} \operatorname{cis}(12\theta).$$

Il y a 12 solutions qui ont un module égal à 1 et qui sont données par:

$$\operatorname{cis}\left(k\frac{\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 11.$$

Chaque solution correspond à un point sur le cercle de rayon 1 dans le plan complexe.



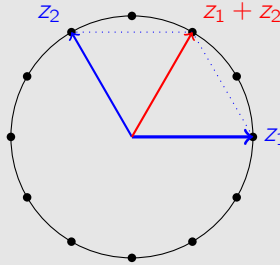
(b) (2 points) Déterminer la probabilité que  $|z_1 + z_2| = 1$ .



Déterminer l'angle que doivent former les deux vecteurs reliant  $z_1$  et  $z_2$ .

Condition: angle de 120 degrés (comme indiqué sur le dessin). En effet, dans ce cas on voit que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| \cos 60^\circ + |z_2| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$



On calcule maintenant  $\Pr\{|z_1 + z_2| = 1\}$ .

- ▶ Cas possibles (nombres de paires de solutions):  $\binom{12}{2}$ .
- ▶ Cas favorables (nombres de paires avec un angle de 120 degrés):  $\frac{12 \times 2}{2}$ .

La probabilité demandée est

$$\Pr\{|z_1 + z_2| = 1\} = \frac{\frac{12 \times 2}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{2}{11}.$$

Interprétation: pour une racine  $z_1$  choisie aléatoirement, il y a 2 cas favorables et 11 cas possibles pour le choix de  $z_2$ .