

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique Ecole Royale Militaire

Algèbre

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 2, Question 2

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- ▶ Analyse
- ▶ Trigonométrie
- ▶ Géométrie

Partie 2 de l'examen

- ▶ Algèbre
 - Nombres complexes
- ▶ Géométrie analytique
- ▶ Probabilités et statistique
 - Probabilité d'un événement, combinatoire

Question & solution

On choisit au hasard deux solutions z_1 et z_2 différentes de l'équation dans \mathbb{C}

$$z^{12} - 1 = 0.$$

- (a) (2 points) Commencer par donner toutes les solutions de cette équation sous leur forme $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$. Représenter ces solutions dans le plan complexe.



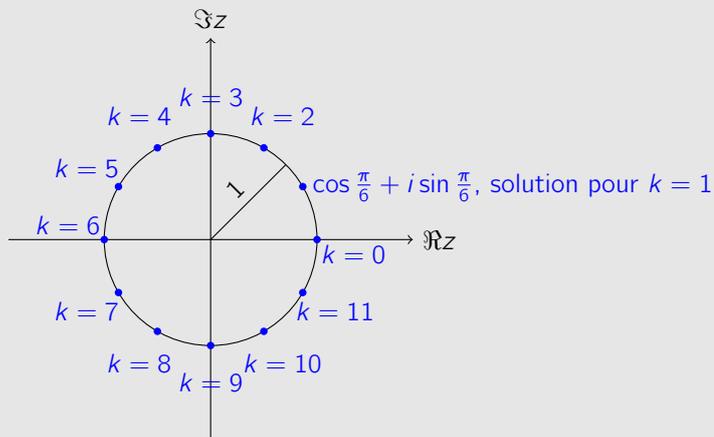
- ▶ Notation: $\rho \operatorname{cis}(\theta) = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$.
- ▶ $1 = \operatorname{cis}(2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ▶ De Moivre:

$$(\rho \operatorname{cis}(\theta))^{12} = \rho^{12} \operatorname{cis}(12\theta).$$

Il y a 12 solutions qui ont un module égal à 1 et qui sont données par:

$$\operatorname{cis}\left(k\frac{\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 11.$$

Chaque solution correspond à un point sur le cercle de rayon 1 dans le plan complexe.



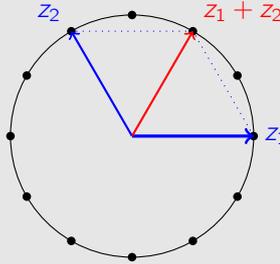
(b) (2 points) Déterminer la probabilité que $|z_1 + z_2| = 1$.



Déterminer l'angle que doivent former les deux vecteurs reliant z_1 et z_2 .

Condition: angle de 120 degrés (comme indiqué sur le dessin). En effet, dans ce cas on voit que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| \cos 60^\circ + |z_2| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$



On calcule maintenant $\Pr\{|z_1 + z_2| = 1\}$.

- ▶ Cas possibles (nombres de paires de solutions): $\binom{12}{2}$.
- ▶ Cas favorables (nombres de paires avec un angle de 120 degrés): $\frac{12 \times 2}{2}$.

La probabilité demandée est

$$\Pr\{|z_1 + z_2| = 1\} = \frac{\frac{12 \times 2}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{2}{11}.$$

Interprétation: pour une racine z_1 choisie aléatoirement, il y a 2 cas favorables et 11 cas possibles pour le choix de z_2 .