

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique Ecole Royale Militaire

Algèbre

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 2, Question 1

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- ▶ Analyse
- ▶ Trigonométrie
- ▶ Géométrie

Partie 2 de l'examen

- ▶ Algèbre
 - Polynômes
- ▶ Géométrie analytique
- ▶ Probabilités et statistique

Question & solution

Trouver un polynôme $p(x)$ tel que $p(x) - p'(x) = x^9$. Déterminer d'abord le degré de $p(x)$. Exprimer les coefficients à l'aide de factoriels.



- ▶ Montrer que $p(x)$ s'écrit:

$$p(x) = a_9x^9 + a_8x^8 + a_7x^7 + \dots + a_1x + a_0.$$

- ▶ Ensuite, utiliser l'équation $p(x) - p'(x) = x^9$.

On trouve d'abord le degré du polynôme:

$$p(x) - p'(x) = x^9 \Rightarrow \deg(p(x)) = 9.$$

Il en découle que:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_9x^9 + a_8x^8 + a_7x^7 + \dots + a_1x + a_0 \\ p'(x) &= 9a_9x^8 + 8a_8x^7 + 7a_7x^6 + \dots + a_1 \end{aligned}$$

avec a_0, a_1, \dots, a_9 des coefficients à déterminer. On utilise ensuite l'équation donnée dans l'énoncé:

$$p(x) - p'(x) = x^9 \iff \begin{cases} a_9 & = 1 \\ a_8 - 9a_9 & = 0 \\ a_7 - 8a_8 & = 0 \\ \vdots & \\ a_1 - 2a_2 & = 0 \\ a_0 - a_1 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_9 & = 1 & = 9!/9! \\ a_8 & = 9 & = 9!/8! \\ a_7 & = 9 \cdot 8 & = 9!/7! \\ \vdots & \\ a_1 & = 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 & = 9!/1! \\ a_0 & = 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 & = 9!/0! \end{cases}$$
