

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique Ecole Royale Militaire

Géométrie

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 1, Question 4

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

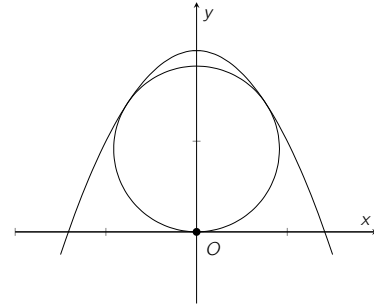
- ▶ Analyse
 - Dérivée
- ▶ Trigonométrie
- ▶ Géométrie
 - Raisonnement et construction

Partie 2 de l'examen

- ▶ Algèbre
- ▶ Géométrie analytique
 - Cercle et parabole
- ▶ Probabilités et statistique

Question & solution

Dans un système d'axes Oxy , déterminer le rayon du plus grand cercle situé au-dessus de l'axe des x et en-dessous de la parabole d'équation $y = -x^2 + 2$, comme représenté ci-contre.



- ▶ Aux points d'intersection entre le cercle et la parabole, le cercle et la parabole ont la même tangente.
- ▶ L'équation du cercle est $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, où R est le rayon.

Equation du cercle:

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} + R.$$

Points d'intersection entre le cercle et la parabole:

$$(x, y) = (\pm a, b).$$

En $x = a$ suivant la parabole et le cercle on a

$$\text{m\^eme ordonn\^ee (\^equation 1) : } \quad -a^2 + 2 = \sqrt{R^2 - a^2} + R$$

$$\text{m\^eme d\^eriv\^ee (equation 2) : } \quad -2a = \frac{1}{2} \frac{-2a}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

Il en d\^ecoule que:

$$R^2 - a^2 = \frac{1}{4} \quad (\text{equation 2 apr\^es simplification})$$

$$R + a^2 = \frac{3}{2} \quad (\text{equation 2 dans equation 1})$$

On veut d\^eterminer R . On additionne les \^equations membre \^a membre:

$$R^2 + R - \frac{7}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{8}}{2}.$$

Le rayon est $R = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$.