Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Analytische Meetkunde

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 2, Vraag 4

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

- Analyse
- Trigonometrie
- Meetkunde

Deel 2 van het examen

- Algebra
- Analytische Meetkunde
  - Vergelijkingen van rechten en vlakken in de ruimte
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag & oplossing

De cartesische vergelijkingen van drie rechten d_1, d_2, d_3 in de ruimte zijn gegeven:

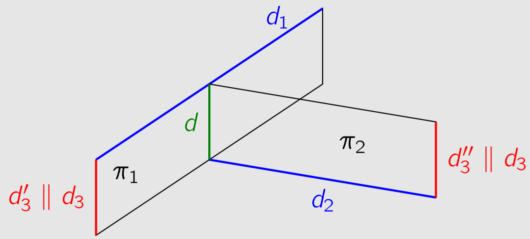
$$d_1 \equiv \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} , \qquad d_2 \equiv \begin{cases} y = x \\ z = 1 \end{cases} , \qquad d_3 \equiv \begin{cases} z = y \\ x = -2 \end{cases} .$$

Bepaal de cartesische vergelijkingen van de rechte die d_1 en d_2 snijdt, en die evenwijdig met d_3 is. Maak eerst een schets.

- Bepaal een vlak π_1 dat d_1 bevat en evenwijdig is met d_3.
- Bepaal een vlak π_2 dat d_2 bevat en evenwijdig is met d_3.
- De gezochte rechte wordt gegeven door de doorsnede van de twee vlakken.

We hebben de richtingvectoren van de drie rechten nodig.

$$d_1 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d_2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_3 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$



$$d = \pi_1 \cap \pi_2, \quad \pi_1 \perp \vec{n}_1, \quad \pi_2 \perp \vec{n}_2.$$

We willen $\vec{n}_1 = (a, b, c)$ en $\vec{n}_2 = (a', b', c')$ bepalen.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a, b, c) \circ (1, 0, 1) & = 0 \\ (a, b, c) \circ (0, 1, 1) & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} a + c & = 0 \\ b + c & = 0 \end{array} \right. \iff \vec{n}_1 \parallel (1, 1, -1).$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a', b', c') \circ (1, 1, 0) & = 0 \\ (a', b', c') \circ (0, 1, 1) & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} a' + b' & = 0 \\ b' + c' & = 0 \end{array} \right. \iff \vec{n}_2 \parallel (1, -1, 1).$$

De twee vlakken hebben als vergelijking

$$\pi_1 \equiv x + y - z = e, \qquad \pi_2 \equiv x - y + z = e'.$$

Door te merken dat $(0, 0, 0) \in \pi_1$ en $(0, 0, 1) \in \pi_2$, zijn de vergelijkingen van de twee vlakken volledig bepaald $(e = 0, \ e' = 1)$.

We hebben gevonden dat

$$d \equiv \begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x - y + z & = 1 \end{cases} .$$