Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Waarschijnlijkheidsrekenen

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 2, Vraag 3

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

- Analyse
- Trigonometrie
- Meetkunde

Deel 2 van het examen

- Algebra
- Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek
    - Combinatoriek

Vraag & oplossing

Een gehele positieve oplossing van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r, \quad n \geq 1, \quad r \geq 0,$$

met onbekenden $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wordt geschreven als $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ waarbij $e_1, e_2, \ldots, e_n$ geordende gehele getallen zijn zodat $e_1 + e_2 + \ldots + e_n = r$ en $e_i \geq 0$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$. Op analoge wijze definiëren we het begrip positieve gehele oplossing voor een ongelijkheid van de vorm

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq r.$$

Bijvoorbeeld, $(0, 2)$, $(2, 0)$ en $(1, 1)$ zijn drie verschillende positieve gehele oplossingen van de vergelijking $x_1 + x_2 = 2$, maar $(-1, 3)$ en $(1/2, 3/2)$ zijn dat niet.

(a) (2 punten) Bepaal het aantal positieve gehele oplossingen van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9.$$

- Wat zijn de mogelijke waarden voor x_1? Begin eerst met het geval dat $z_1 = 9$, want dan is er maar één mogelijke oplossing: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (9, 0, 0, 0)$.
- Eens x_1 vast is, bepaal de mogelijke waarden voor x_2 (en zo verder voor x_3 en x_4).

In de tabel, de kolom # Opl. stelt het aantal oplossigen voor.

			# Opl.
$x_1 = 9$	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 0$	1
$x_1 = 8$	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 1$	2
$x_1 = 7$	$x_2 = 2$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 1$	2
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 2$	3
$x_1 = 6$	$x_2 = 3$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 2$	$x_3 + x_4 = 1$	2
	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 2$	3
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 3$	4
$x_1 = 5$	$x_2 = 4$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 3$	$x_3 + x_4 = 1$	2
	$x_2 = 2$	$x_3 + x_4 = 2$	3
	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 3$	4
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 4$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Andere rijen in de tabel:
We zien dat als $x_1 = a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ en $x_2 = b \in \{0, \ldots, 9-a\}$, dan is het aantal oplossingen van de vergelijking $x_3 + x_4 = 9 - a - b$ gegeven door $9 - a - b + 1 = 10 - a - b$. De mogelijke waarden voor x_3 zijn immers alle natuurlijke getallen van 0 tot $9 - a - b$, en voor elke waarde van x_3 is er slechts één mogelijke waarde voor x_4.

Om het totaal aantal oplossingen te vinden, tellen we alle waarden in de laatste kolom van de tabel bij elkaar op:

$$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\ldots+(1+2+\ldots+10)=220.$$

(b) (1 punt) Leid hieruit het aantal positieve gehele oplossingen van de ongelijkheid $x_1+x_2+x_3 \leq 9$ af.

$x_1+x_2+x_3 \leq 9 \quad (x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{N}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1+x_2+x_3+x_4=9 \quad (x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{N})$

Zoals voor **(a)**, 220 oplossingen.

(c) (1 punt) Op hoeveel verschillende manieren kunnen 9 munten van 1 euro worden verdeeld onder Amber, Billie, Candice en Djamel? Het is niet verplicht dat iedereen ten minste één euro ontvangt.

Amber: x_A euros, Billie: x_B euros, Candice: x_C euros, Djamel: x_D euros.
We moeten het aantal positieve gehele oplossingen van de volgende vergelijking tellen:

$$x_A+x_B+x_C+x_D=9.$$

(a) $\Rightarrow$ 220 verschillende manieren.

(d) (2 punten) Bepaal het aantal verschillende rijen dat kan worden gemaakt met de volgende 12 symbolen:

$$\{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\star,\star,\star\}.$$

Elk symbool wordt exact één keer gebruikt. Bijvoorbeeld,

$$(\bullet,\bullet,\star,\bullet,\star,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\star) \qquad \text{en} \qquad (\star,\bullet,\bullet,\star,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\star,\bullet,\bullet,\bullet)$$

zijn twee verschillende rijen. De $\bullet$ symbolen zijn onderling niet te onderscheiden, en de $\star$ symbolen onderling ook niet.

Drie posities kiezen voor de $\star$ uit de 12 opties:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220.$$

Opmerking over het verband met **(a)**:

De positie van de drie symbolen $\star$ laat ons toe de symbolen $\bullet$ in 4 groepen te verdelen, die elk overeenkomen met één oplossing van de vergelijking in **(a)**. Bijvoorbeeld,

$$(\underbrace{\bullet, \bullet}_{x_1=2}, \star, \underbrace{\bullet}_{x_2=1}, \star, \underbrace{\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet}_{x_3=6}, \star \underbrace{\quad}_{x_4=0}).$$