

# Vorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit Koninklijke Militaire School

## Algebra

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 2, Vraag 2

### Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

- ▶ Analyse
- ▶ Trigonometrie
- ▶ Meetkunde

Deel 2 van het examen

- ▶ Algebra
  - Complexe getallen
- ▶ Analytische Meetkunde
- ▶ Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek
  - Waarschijnlijkheid van een gebeurtenis, combinatoriek

## Vraag & oplossing

Twee verschillende oplossingen  $z_1$  en  $z_2$  van de volgende vergelijking in  $\mathbb{C}$  worden willekeurig gekozen:

$$z^{12} - 1 = 0.$$

- (a) (2 punten) Begin met alle oplossingen van deze vergelijking in hun vorm  $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$  te geven. Stel deze oplossingen voor in het complexe vlak.



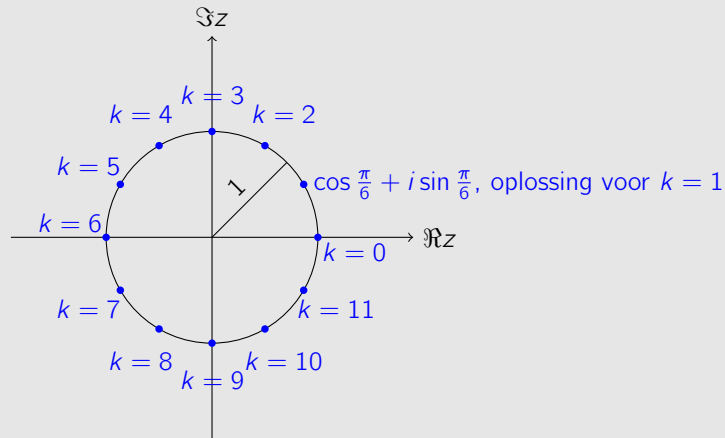
- ▶ Notatie:  $\rho \operatorname{cis}(\theta) = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$ .
- ▶  $1 = \operatorname{cis}(2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- ▶ De Moivre:

$$(\rho \operatorname{cis}(\theta))^{12} = \rho^{12} \operatorname{cis}(12\theta).$$

De 12 oplossingen hebben een modulus gelijk aan 1, en worden gegeven door:

$$\operatorname{cis}\left(k \frac{\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 11.$$

Elke oplossing komt overeen met één punt op de cirkel met straal 1 in het complexe vlak.



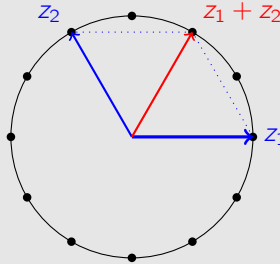
(b) (2 punten) Bepaal de waarschijnlijkheid dat  $|z_1 + z_2| = 1$ .



Bepaal de hoek gevormd door de twee vectoren die de oorsprong met  $z_1$  en  $z_2$  verbinden.

Voorwaarde: hoek van 120 graden (zoals getoond op de tekening). Inderdaad, in dit geval ziet men dat

$$|z_1 + z_2| = |z_1| \cos 60^\circ + |z_2| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$



We rekenen nu  $\Pr\{|z_1 + z_2| = 1\}$ .

- ▶ Mogelijke gevallen (aantal paren van oplossingen):  $\binom{12}{2}$ .
- ▶ Gunstige gevallen (aantal paren met een hoek van 120 graden):  $\frac{12 \times 2}{2}$ .

De gevraagde waarschijnlijkheid is

$$\Pr\{|z_1 + z_2| = 1\} = \frac{\frac{12 \times 2}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{2}{11}.$$

Interpretatie: voor een willekeurig gekozen wortel  $z_1$  zijn er 2 gunstige gevallen en 11 mogelijke gevallen voor de keuze van  $z_2$ .