

# Vorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit Koninklijke Militaire School

## Meetkunde

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 1, Vraag 4

### Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

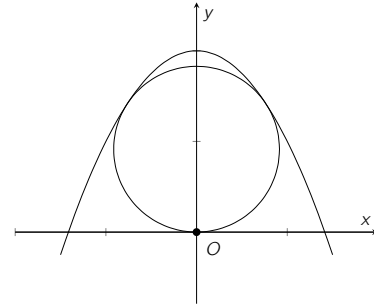
- ▶ Analyse
  - Afgeleide
- ▶ Trigonometrie
- ▶ Meetkunde
  - Redeneren en constructie

Deel 2 van het examen

- ▶ Algebra
- ▶ Analytische Meetkunde
  - Cirkel en parabool
- ▶ Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

## Vraag & oplossing

Bepaal in een assenstelsel  $Oxy$  de straal van de grootste mogelijke cirkel boven de  $x$ -as en onder de parabool met vergelijking  $y = -x^2 + 2$ , zoals hiernaast afgebeeld.



- ▶ Aan de snijpunten tussen de cirkel en de parabool, hebben de cirkel en de parabool dezelfde raaklijn.
- ▶ De vergelijking van de cirkel is  $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ , waarbij  $R$  de straal is.

Vergelijking van de cirkel:

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} + R.$$

Snijpunten van de cirkel en de parabool:

$$(x, y) = (\pm a, b).$$

In  $x = a$  volgens de parabool en de cirkel hebben we

$$\text{zelfde } y\text{-waarde (vergelijking 1):} \quad -a^2 + 2 = \sqrt{R^2 - a^2} + R$$

$$\text{zelfde afgeleide (vergelijking 2):} \quad -2a = \frac{1}{2} \frac{-2a}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

Hieruit volgt dat:

$$R^2 - a^2 = \frac{1}{4} \quad (\text{vergelijking 2 na vereenvoudiging})$$

$$R + a^2 = \frac{3}{2} \quad (\text{vergelijking 2 in vergelijking 1})$$

We willen  $R$  bepalen. We tellen de vergelijkingen lid per lid op:

$$R^2 + R - \frac{7}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{8}}{2}.$$

De straal is  $R = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ .