Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique
Ecole Royale Militaire

Analyse

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 1, Question 2

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- Analyse
    - Dérivées
    - Intégrales
- Trigonométrie
- Géométrie

Partie 2 de l'examen

- Algèbre
- Géométrie analytique
- Probabilités et statistique

Question & solution

Les fonctions cosh et sinh sont données par

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $\cosh' = \sinh$ et $\sinh' = \cosh$, où l'accent $(\,')$ indique la dérivée.

(a) (1 point) Calculer la dérivée de $\cosh(\sinh(\cosh(x)))$ en $x = 0$.

Première étape: $\big(\cosh\circ\sinh\circ\cosh\big)'(x) = \big(\cosh'\circ\sinh\circ\cosh\big)(x)\cdot\big(\sinh\circ\cosh\big)'(x).$

$\big(\cosh\circ\sinh\circ\cosh\big)'(x) = \big(\cosh'\circ\sinh\circ\cosh\big)(x)\cdot\big(\sinh'\circ\cosh\big)(x)\cdot\cosh'(x).$

$\sinh(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(\cosh\circ\sinh\circ\cosh\big)'(0) = \sinh(\sinh(\cosh(0)))\cosh(\cosh(0))\sinh(0) = 0.$

(b) (1 point) Prouver que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = \frac{1}{4}(2+2) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(c) (1 point) Prouver que $2\sinh^2(x) = \cosh(2x) - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$2\sinh^2(x) = 2\cdot\tfrac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right) = \cosh(2x) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(d) (2 points) Prouver que

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \text{const.},$$

par substitution $x = \cosh\theta$ avec $x \geq 1,\ \theta \geq 0$. On pourra utiliser les sous-questions (b) et (c).

Commencer par prouver que $\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\frac{\sinh 2\theta}{2} - \frac{\theta}{2} + \text{const.}$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}dx &= \int \sqrt{\cosh^2\theta - 1}\sinh\theta\,d\theta \qquad \text{avec} \qquad x = \cosh\theta \geq 1,\ \theta \geq 0 \\
&\overset{(a)}{=} \int \sinh^2\theta d\theta \\
&\overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\int (\cosh 2\theta - 1)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sinh 2\theta}{2} - \frac{\theta}{2} + \text{const.} \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{x\sqrt{x^2-1}}_{\text{(i)}} - \frac{1}{2}\underbrace{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}_{\text{(ii)}} + \text{const.}
\end{aligned}$$

Pour (i):

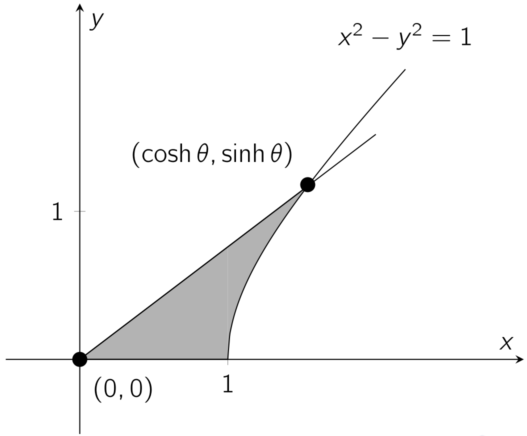
$$\frac{\sinh 2\theta}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^{2\theta} - e^{-2\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right) = \cosh\theta \sinh\theta = x\sqrt{x^2 - 1}.$$

Pour (ii):

$$x = \cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2\theta} - 2xe^{\theta} + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\theta} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Comme $\theta \geq 0$, il vient $\theta = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

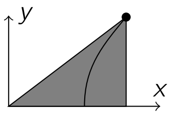
(e) (2 points) Prouver que l'aire de la région colorée ci-contre vaut $\dfrac{\theta}{2}$, où θ est un réel positif.



Cette région est délimitée par l'axe des x, la courbe $x^2 - y^2 = 1$ et la droite passant par l'origine et le point $(\cosh\theta, \sinh\theta)$.

Première étape:

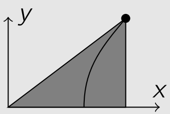
$$\text{Aire colorée} = \text{Aire}\Bigg($$



$$\Bigg) - \int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2-1}\,dx$$

et utiliser (d).

$$\text{Aire colorée} = \text{Aire}\Bigg($$



$$\Bigg) - \int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2-1}\,dx$$

(d) $\Rightarrow \quad \displaystyle\int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cosh\Theta\sinh\Theta - \frac{\Theta}{2}\right]_0^{\theta} = \frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \frac{\theta}{2}.$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \left(\frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$