Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Analyse

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 1, Vraag 2

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

- Analyse
  - Afgeleiden
  - Integralen
- Trigonometrie
- Meetkunde

Deel 2 van het examen

- Algebra
- Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag & oplossing

De functies cosh en sinh zijn gegeven door

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{en} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Merk op dat $\cosh' = \sinh$ en $\sinh' = \cosh$, waarbij het accent ($'$) de afgeleide aanduidt.

(a) (1 punt) Bereken de afgeleide van $\cosh(\sinh(\cosh(x)))$ in $x = 0$.

Eerste stap: $\big(\cosh \circ \sinh \circ \cosh\big)'(x) = \big(\cosh' \circ \sinh \circ \cosh\big)(x) \cdot \big(\sinh \circ \cosh\big)'(x)$.

$$\big(\cosh \circ \sinh \circ \cosh\big)'(x) = \big(\cosh' \circ \sinh \circ \cosh\big)(x) \cdot \big(\sinh' \circ \cosh\big)(x) \cdot \cosh'(x).$$

$$\sinh(0) = \tfrac{e^0 - e^0}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(\cosh \circ \sinh \circ \cosh\big)'(0) = \sinh(\sinh(\cosh(0)))\cosh(\cosh(0))\sinh(0) = 0.$$

(b) (1 punt) Bewijs dat $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \tfrac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \tfrac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = \tfrac{1}{4}(2+2) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) (1 punt) Bewijs dat $2\sinh^2(x) = \cosh(2x) - 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

$$2\sinh^2(x) = 2\cdot\tfrac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right) = \cosh(2x) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(d) (2 punten) Bewijs dat

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{const.},$$

via substitutie $x = \cosh\theta$ waarbij $x \geq 1,\ \theta \geq 0$. Je kan hiervoor de deelvragen (b) en (c) gebruiken.

Bewijs eerst dat $\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\frac{\sinh 2\theta}{2} - \frac{\theta}{2} + \text{const.}$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}dx &= \int \sqrt{\cosh^2\theta - 1}\,\sinh\theta\, d\theta \qquad \text{waarbij} \qquad x = \cosh\theta \geq 1,\ \theta \geq 0\\
&\overset{(a)}{=} \int \sinh^2\theta d\theta\\
&\overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\int (\cosh 2\theta - 1)d\theta\\
&= \frac{1}{2}\frac{\sinh 2\theta}{2} - \frac{\theta}{2} + \text{const.}\\
&= \frac{1}{2}\underbrace{x\sqrt{x^2-1}}_{\text{(i)}} - \frac{1}{2}\underbrace{\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}_{\text{(ii)}} + \text{const.}
\end{aligned}$$

Voor (i):

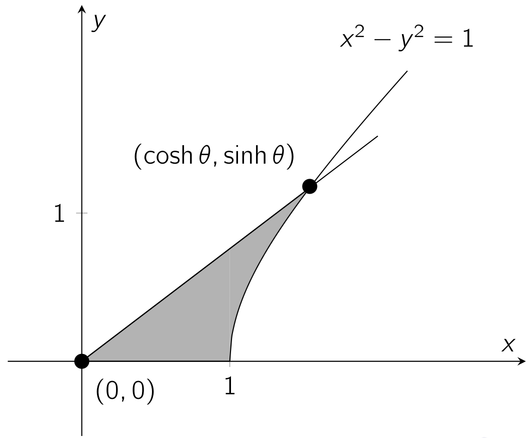
$$\frac{\sinh 2\theta}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^{2\theta} - e^{-2\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right) = \cosh\theta\sinh\theta = x\sqrt{x^2-1}.$$

Voor (ii):

$$x = \cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2\theta} - 2xe^{\theta} + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\theta} = x \pm \sqrt{x^2-1}.$$

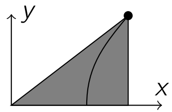
Gezien $\theta \geq 0$, er volgt $\theta = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

(e) (2 punten) Bewijs dat de oppervlakte van het gekleurde gebied hiernaast $\frac{\theta}{2}$ is, waarbij θ een positief reëel getal is.

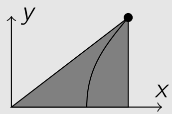


Dit gebied wordt begrensd door de x-as, de kromme $x^2 - y^2 = 1$ en de rechte die door de oorsprong en het punt $(\cosh\theta, \sinh\theta)$ gaat.

Eerste stap:

$$\text{Gekleurd Opp.} = \text{Opp.}\Big($$

$$\Big) - \int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2-1}dx$$

en maak gebruik van (d).

$$\text{Gekleurd Opp.} = \text{Opp.}\Big($$

$$\Big) - \int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2-1}dx$$

(d) $\Rightarrow$ $\int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2-1}dx = \left[\frac{1}{2}\cosh\ominus\sinh\ominus - \frac{\ominus}{2}\right]_0^{\theta} = \frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \frac{\theta}{2}.$

$$= \frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \left(\frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \frac{\theta}{2}.$$