

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique Ecole Royale Militaire

Analyse

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 1, Question 1

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- ▶ Analyse
 - Suites
- ▶ Trigonométrie
- ▶ Géométrie

Partie 2 de l'examen

- ▶ Algèbre
- ▶ Géométrie analytique
- ▶ Probabilités et statistique

Question & solution

Les éléments de la suite (u_n) satisfont à

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad 3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(a) (1 point) Montrer que la suite $(u_n + \frac{1}{3})$ est une suite géométrique de raison 2.



Ecrire $u_{n+1} + \frac{1}{3}$ en fonction de $u_n + \frac{1}{3}$.

Pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on utilise la relation de récurrence donnée dans l'énoncé:

$$3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} + \frac{1}{3} = 2 \left(u_n + \frac{1}{3} \right).$$

(b) (2 points) Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n .



Trouver d'abord une expression explicite pour $u_n + \frac{1}{3}$ en fonction de n à l'aide de (a).

$$u_{n+1} + \frac{1}{3} = 2 \left(u_n + \frac{1}{3} \right) = 2^2 \left(u_{n-1} + \frac{1}{3} \right) = \dots = 2^{n+1} \left(u_0 + \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \quad u_n + \frac{1}{3} = 2^n \left(u_0 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2^{n+1}}{3}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1).$$

(c) (2 points) Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.



Utiliser (a) et la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_n &= \left(u_0 + \frac{1}{3}\right) + \left(u_1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{1}{3}\right) - (n+1)\frac{1}{3} \\ &= \frac{\left(u_0 + \frac{1}{3}\right) - \left(u_n + \frac{1}{3}\right) \cdot 2}{1-2} - (n+1)\frac{1}{3} \\ &= 2 \cdot \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{2}{3} - (n+1)\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}(2^{n+2} - n - 3). \end{aligned}$$