

Vorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit Koninklijke Militaire School

Analyse

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 1, Vraag 1

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

- ▶ Analyse
 - Rijen
- ▶ Trigonometrie
- ▶ Meetkunde

Deel 2 van het examen

- ▶ Algebra
- ▶ Analytische Meetkunde
- ▶ Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag & oplossing

De elementen van de rij (u_n) voldoen aan

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad \text{en} \quad 3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) (1 punt) Toon aan dat de rij $(u_n + \frac{1}{3})$ een meetkundige rij is met reden gelijk aan 2.



Bepaal $u_{n+1} + \frac{1}{3}$ in functie van $u_n + \frac{1}{3}$.

Voor $n = 0, 1, 2, \dots$, we maken gebruik van de gegeven recurrentie vergelijking:

$$3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} + \frac{1}{3} = 2 \left(u_n + \frac{1}{3} \right).$$

- (b) (2 punten) Bepaal een expliciet voorschrift van u_n in functie van n .



Bepaal eerst een expliciet voorschrift voor $u_n + \frac{1}{3}$ in functie van n aan de hand van (a).

$$u_{n+1} + \frac{1}{3} = 2 \left(u_n + \frac{1}{3} \right) = 2^2 \left(u_{n-1} + \frac{1}{3} \right) = \dots = 2^{n+1} \left(u_0 + \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \quad u_n + \frac{1}{3} = 2^n \left(u_0 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2^{n+1}}{3}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1).$$

(c) (2 punten) Bereken $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.



Maak gebruik van (a) en los dit op aan de hand van de formule voor de som van de termen van een meetkundige rij.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_n &= \left(u_0 + \frac{1}{3}\right) + \left(u_1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{1}{3}\right) - (n+1)\frac{1}{3} \\ &= \frac{\left(u_0 + \frac{1}{3}\right) - \left(u_n + \frac{1}{3}\right) \cdot 2}{1-2} - (n+1)\frac{1}{3} \\ &= 2 \cdot \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{2}{3} - (n+1)\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}(2^{n+2} - n - 3). \end{aligned}$$