

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π , e , $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	Total
Points	4	4	6	6	20

Question 1 **4 points**

Trouver un polynôme $p(x)$ tel que $p(x) - p'(x) = x^9$. Déterminer d'abord le degré de $p(x)$. Exprimer les coefficients à l'aide de factoriels.

Question 2 **4 points**

On choisit au hasard deux solutions z_1 et z_2 différentes de l'équation dans \mathbb{C}

$$z^{12} - 1 = 0.$$

- (a) (2 points) Commencer par donner toutes les solutions de cette équation sous leur forme $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$. Représenter ces solutions dans le plan complexe.
- (b) (2 points) Déterminer la probabilité que $|z_1 + z_2| = 1$.

Question 3 **6 points**

Une solution entière positive de l'équation

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, \quad n \geq 1, \quad r \geq 0,$$

d'inconnues x_1, x_2, \dots, x_n , s'écrit (e_1, e_2, \dots, e_n) où e_1, e_2, \dots, e_n sont des entiers ordonnés tels que $e_1 + e_2 + \dots + e_n = r$ et $e_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. On définit de manière analogue la notion de solution entière positive pour une inéquation de la forme

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq r.$$

Par exemple, $(0, 2)$, $(2, 0)$ et $(1, 1)$ sont trois solutions entières positives différentes de l'équation $x_1 + x_2 = 2$, mais ce n'est pas le cas de $(-1, 3)$ ni de $(1/2, 3/2)$.

- (a) (2 points) Déterminer le nombre de solutions entières positives de l'équation
- (b) (1 point) En déduire le nombre de solutions entières positives de l'inéquation $x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$.
- (c) (1 point) De combien de façons différentes peut-on distribuer 9 pièces de 1 euro à Amber, Billie, Candice et Djamel ? Il n'est pas obligatoire que chacun reçoive au moins un euro.
- (d) (2 points) Déterminer le nombre de suites différentes réalisables avec les 12 symboles suivants :

$$\{\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \star, \star, \star\}.$$

Chaque symbole est utilisé exactement une fois. Par exemple,

$$(\bullet, \bullet, \star, \bullet, \star, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \star) \quad \text{et} \quad (\star, \bullet, \bullet, \star, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \star, \bullet, \bullet, \bullet)$$

sont deux suites différentes. Les \bullet sont indiscernables entre eux, et les \star aussi.

Question 4 **6 points**

On donne les équations cartésiennes de trois droites d_1, d_2, d_3 dans l'espace :

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}, \quad d_2 \equiv \begin{cases} y = x \\ z = 1 \end{cases}, \quad d_3 \equiv \begin{cases} z = y \\ x = -2 \end{cases}.$$

Déterminer les équations cartésiennes de la droite qui coupe d_1 et d_2 , et qui est parallèle à d_3 . Commencer par faire un croquis.

