

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π , e , $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	Total
Points	5	7	4	4	20

Question 1 **5 points**

Les éléments de la suite (u_n) satisfont à

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad 3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) (1 point) Montrer que la suite $(u_n + \frac{1}{3})$ est une suite géométrique de raison 2.
- (b) (2 points) Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n .
- (c) (2 points) Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Question 2 **7 points**

Les fonctions cosh et sinh sont données par

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $\cosh' = \sinh$ et $\sinh' = \cosh$, où l'accent (') indique la dérivée.

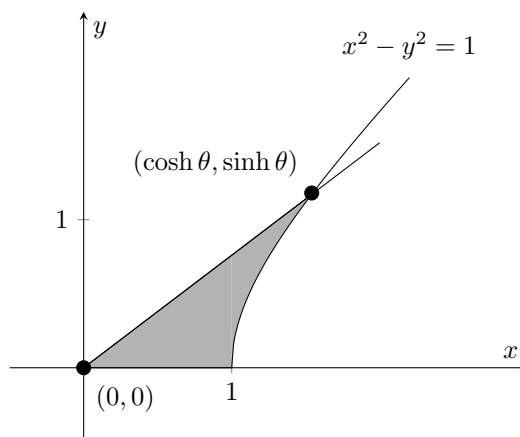
- (a) (1 point) Calculer la dérivée de $\cosh(\sinh(\cosh(x)))$ en $x = 0$.
- (b) (1 point) Prouver que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (c) (1 point) Prouver que $2 \sinh^2(x) = \cosh(2x) - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (d) (2 points) Prouver que

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \text{const.},$$

par substitution $x = \cosh \theta$ avec $x \geq 1$, $\theta \geq 0$. On pourra utiliser les sous-questions (b) et (c).

- (e) (2 points) Prouver que l'aire de la région colorée ci-contre vaut $\frac{\theta}{2}$, où θ est un réel positif.

Cette région est délimitée par l'axe des x , la courbe $x^2 - y^2 = 1$ et la droite passant par l'origine et le point $(\cosh \theta, \sinh \theta)$.



Question 3 **4 points**

Résoudre dans \mathbb{R} :

$$(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x + \cos 11x) \cdot \sin x = -\frac{1}{4}.$$

Question 4 **4 points**

Dans un système d'axes Oxy , déterminer le rayon du plus grand cercle situé au-dessus de l'axe des x et en-dessous de la parabole d'équation $y = -x^2 + 2$, comme représenté ci-contre.

