Konikinklijke Militaire School - Bijkomende proef POL

2022 — Algebra - Analytische meetkunde - Waarschijnlijkheidsrekenen — **Reeks A Deel 2**

4 vragen - 3 uren

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers zijn wel toegestaan.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	4	4	6	6	20

Vraag 1 .... **4 punten**

Vind een veelterm $p(x)$ zo dat $p(x) - p'(x) = x^9$. Bepaal eerst de graad van $p(x)$. Druk de coëfficiënten uit met faculteiten.

Vraag 2 .... **4 punten**

Twee verschillende oplossingen z_1 en z_2 van de volgende vergelijking in $\mathbb{C}$ worden willekeurig gekozen:

$$z^{12} - 1 = 0.$$

(a) (2 punten) Begin met alle oplossingen van deze vergelijking in hun vorm $z = \rho\,\text{cis}(\theta)$ te geven. Stel deze oplossingen voor in het complexe vlak.

(b) (2 punten) Bepaal de waarschijnlijkheid dat $|z_1 + z_2| = 1$.

Vraag 3 .... **6 punten**

Een gehele positieve oplossing van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r, \quad n \geq 1, \quad r \geq 0,$$

met onbekenden $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wordt geschreven als $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ waarbij $e_1, e_2, \ldots, e_n$ geordende gehele getallen zijn zodat $e_1 + e_2 + \ldots + e_n = r$ en $e_i \geq 0$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$. Op analoge wijze definiëren we het begrip positieve gehele oplossing voor een ongelijkheid van de vorm

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq r.$$

Bijvoorbeeld, $(0, 2)$, $(2, 0)$ en $(1, 1)$ zijn drie verschillende positieve gehele oplossingen van de vergelijking $x_1 + x_2 = 2$, maar $(-1, 3)$ en $(1/2, 3/2)$ zijn dat niet.

(a) (2 punten) Bepaal het aantal positieve gehele oplossingen van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9.$$

(b) (1 punt) Leid hieruit het aantal positieve gehele oplossingen van de ongelijkheid $x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$ af.

(c) (1 punt) Op hoeveel verschillende manieren kunnen 9 munten van 1 euro worden verdeeld onder Amber, Billie, Candice en Djamel? Het is niet verplicht dat iedereen ten minste één euro ontvangt.

(d) (2 punten) Bepaal het aantal verschillende rijen dat kan worden gemaakt met de volgende 12 symbolen:

$$\{\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \star, \star, \star\}.$$

Elk symbool wordt exact één keer gebruikt. Bijvoorbeeld,

$$(\bullet, \bullet, \star, \bullet, \star, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \star) \qquad \text{en} \qquad (\star, \bullet, \bullet, \star, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \star, \bullet, \bullet, \bullet)$$

zijn twee verschillende rijen. De $\bullet$ symbolen zijn onderling niet te onderscheiden, en de $\star$ symbolen onderling ook niet.

Vraag 4 .... **6 punten**

De cartesische vergelijkingen van drie rechten d_1, d_2, d_3 in de ruimte zijn gegeven:

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \quad , \qquad d_2 \equiv \begin{cases} y = x \\ z = 1 \end{cases} \quad , \qquad d_3 \equiv \begin{cases} z = y \\ x = -2 \end{cases} \quad .$$

Bepaal de cartesische vergelijkingen van de rechte die d_1 en d_2 snijdt, en die evenwijdig met d_3 is. Maak eerst een schets.
