Konikinklijke Militaire School - Bijkomende proef POL

2022 Analyse - Goniometrie - Meetkunde **Reeks A Deel 1**

4 vragen - 3 uren

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers zijn wel toegestaan.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	5	7	4	4	20

Vraag 1 .... 5 punten

De elementen van de rij (u_n) voldoen aan

$$u_0 = \frac{1}{3} \qquad \text{en} \qquad 3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

(a) (1 punt) Toon aan dat de rij $(u_n + \frac{1}{3})$ een meetkundige rij is met reden gelijk aan 2.

(b) (2 punten) Bepaal een expliciet voorschrift van u_n in functie van n.

(c) (2 punten) Bereken $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Vraag 2 .... 7 punten

De functies cosh en sinh zijn gegeven door

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{en} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Merk op dat $\cosh' = \sinh$ en $\sinh' = \cosh$, waarbij het accent ($'$) de afgeleide aanduidt.

(a) (1 punt) Bereken de afgeleide van $\cosh(\sinh(\cosh(x)))$ in $x = 0$.

(b) (1 punt) Bewijs dat $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) (1 punt) Bewijs dat $2\sinh^2(x) = \cosh(2x) - 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

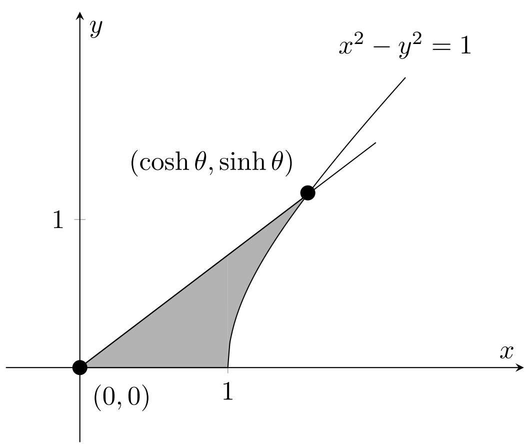
(d) (2 punten) Bewijs dat

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{const.},$$

via substitutie $x = \cosh\theta$ waarbij $x \geq 1$, $\theta \geq 0$. Je kan hiervoor de deelvragen (b) en (c) gebruiken.

(e) (2 punten) Bewijs dat de oppervlakte van het gekleurde gebied hiernaast $\dfrac{\theta}{2}$ is, waarbij θ een positief reëel getal is.

Dit gebied wordt begrensd door de x-as, de kromme $x^2 - y^2 = 1$ en de rechte die door de oorsprong en het punt $(\cosh\theta, \sinh\theta)$ gaat.



Vraag 3 .... 4 punten

Los op in $\mathbb{R}$:

$$\big(\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x+\cos 9x+\cos 11x\big)\cdot\sin x=-\frac{1}{4}.$$

Vraag 4 .... 4 punten

Bepaal in een assenstelsel Oxy de straal van de grootst mogelijke cirkel boven de x-as en onder de parabool met vergelijking $y=-x^2+2$, zoals hiernaast afgebeeld.