Koninklijke Militaire School - Bijkomende proef POL

2021 — Analyse - Algebra - Meetkunde - Waarschijnlijkheidsrekenen — Reeks A

5 vragen - 4 uren

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers zijn wel toegestaan.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., in hun symbolische vorm.

Vraag 1 (4 punten)

Gegeven: de veelterm $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$, met $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) (2 punten) Bewijs dat $P'(1/2) < 4$.

Hint: bereken eerst $(x-1)P(x)$.

(b) (2 punten) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ geldt dat

$$2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times \ldots \times (2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4.$$

Hint: gebruik de logaritmische functie.

Vraag 2 (4 punten)

De algemene term van de rij $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wordt gegeven door $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

(a) (1 punt) Bereken de eerste drie termen van de rij en toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt.$$

(b) (1 punt) Toon aan de hand van partiële integratie aan dat voor alle natuurlijke n verschillend van nul geldt dat

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}.$$

(c) (2 punten) Bewijs met inductie dat voor alle $p \in \mathbb{N}_0$ geldt dat

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{g(p)}{h(p)}$$

met $g(p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ en $h(p) = \prod_{k=1}^{p} 2k$.

Ter herinnering: $\Pi_{k=1}^{N} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_N$.

Vraag 3 (4 punten)

(a) (1 punt) Gegeven: de volgende vergelijking in $\mathbb{C}$, met $i^2 = -1$: $|1 + iz| = |1 - iz|$. Toon aan dat de oplossingen van de vergelijking reëel zijn.

(b) (1 punt) Gegeven: de volgende vergelijking in $\mathbb{C}$ (met onbekende z), met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}. \qquad (\ddagger)$$

Toon aan dat de oplossingen van de vergelijking reëel zijn, zonder die te berekenen.

Hint: maak gebruik van het puntje (a) door een modulusberekening.

(c) (1 punt) Toon aan dat de vergelijking ($\ddagger$) geschreven kan worden onder de vorm $\text{cis}(2n\theta) = \text{cis}(2\alpha)$, voor een bepaalde $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ter herinnering: $\text{cis}(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.

Hint: op basis van het vorige puntje kan men stellen dat $z = \tan\theta$, met $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, en op dezelfde manier te werk gaan voor a.

(d) (1 punt) Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking ($\ddagger$)? Zoek die oplossingen.

Vraag 4 (4 punten)

We noteren $\lambda = \{AB, M\}$ de doorsnedeverhouding waarlangs het punt M de vector $\overrightarrow{AB}$ deelt, dat wil zeggen

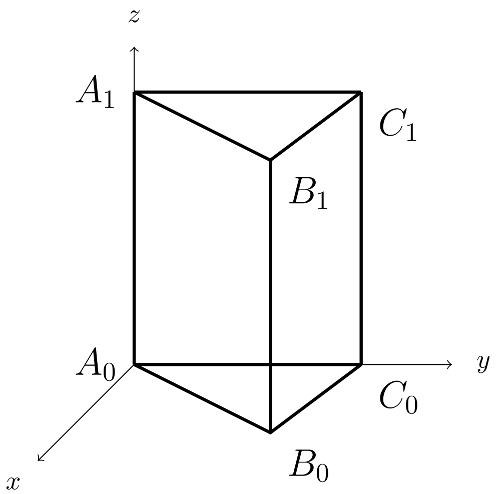
$$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}.$$

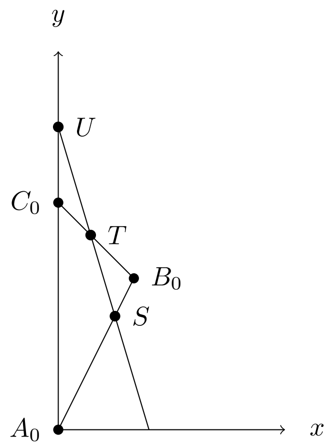
Beschouw een prisma met driehoekige basis zoals in de figuur hieronder (links), waarop we een orthonormaal assenstelsel plaatsen zodat we de volgende punten hebben : $A_0(0,0,0)$, $C_0(0,3,0)$ en $B_1(1,2,5)$.
We nemen op de diagonaal A_0B_1 een punt P zo dat $\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4}$.
Π is het vlak dat door P gaat en evenwijdig is met de diagonalen A_1C_0 en B_0C_1. Het vlak Π snijdt de rechte C_0C_1 in het punt R.

(**a**) (1 punt) Toon aan dat de cartesische vergelijking van het vlak Π wordt gegeven door $20x + 5y + 3z = 25$.

(**b**) (1 punt) Bepaal de doorsnedeverhouding $\{C_0C_1, R\}$.

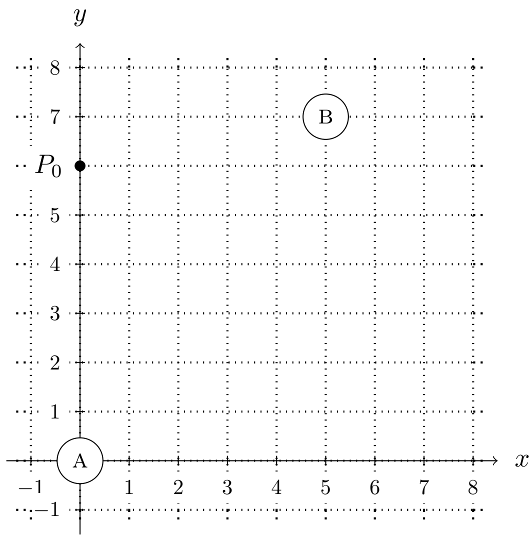
(**c**) (2 punten) Beschouw de driehoek $A_0B_0C_0$. We kiezen drie collineaire punten S, T, U zodat we kunnen schrijven $\lambda_1 = \{A_0B_0, S\}$, $\lambda_2 = \{B_0C_0, T\}$, $\lambda_3 = \{C_0A_0, U\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$, zoals hieronder afgebeeld (rechts). Het product $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ is constant. Bepaal de waarde van die constante.





Vraag 5 (4 punten)

Alice (A) en Bob (B) bewegen zich in het coördinatenvlak door tegelijkertijd opeenvolgende stappen met lengte 1 te zetten.
Alice begint op $(0,0)$ en doet telkens met gelijke kansen een willekeurige stap naar rechts of naar boven. Bob begint op $(5,7)$ en doet telkens met gelijke kansen een willekeurige stap naar links of naar beneden.



(**a**) (1 punt) Wat is de kans dat Alice en Bob elkaar ontmoeten in het punt $P_0(0,6)$?

(**b**) (1 punt) Bepaal de andere punten $(P_1, P_2, \ldots)$ waar het mogelijk is dat Alice en Bob elkaar kunnen ontmoeten.

(**c**) (2 punten) Wat is de kans dat Alice en Bob elkaar zullen ontmoeten?