Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL

2021 — Analyse - Algèbre - Géométrie - Probabilités — Série A

5 questions - 4 heures

> 1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
> 2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
> 3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points)

On donne le polynôme $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$, avec $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) (2 points) Prouver que $P'(1/2) < 4$.
Indication : commencer par calculer $(x-1)P(x)$.

(b) (2 points) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ on a

$$2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times \ldots \times (2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4.$$

Indication: on pourra utiliser la fonction logarithme.

Question 2 (4 points)

Le terme général de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

(a) (1 point) Calculer les trois premiers termes de la suite, et prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt.$$

(b) (1 point) Par intégration par parties, prouver que pour tout naturel n non nul, on a

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}.$$

(c) (2 points) Prouver par récurrence que pour $p \in \mathbb{N}_0$, on a

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{g(p)}{h(p)}$$

avec $g(p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ et $h(p) = \prod_{k=1}^{p} 2k$.
Rappel: $\Pi_{k=1}^{N} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_N$.

Question 3 (4 points)

(a) (1 point) On donne l'équation suivante dans $\mathbb{C}$, avec $i^2 = -1$: $|1 + iz| = |1 - iz|$. Montrer que les solutions sont réelles.

(b) (1 point) On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z, avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}. \qquad (\ddagger)$$

Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles.

Indication: se ramener au point (a) par un calcul de module.

(c) (1 point) Montrer que l'équation $(\ddagger)$ peut s'écrire sous la forme $\mathrm{cis}(2n\theta) = \mathrm{cis}(2\alpha)$, pour un certain $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Rappel: $\mathrm{cis}(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.
Indication: en vertu du point précédent on peut poser $z = \tan\theta$, avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et procéder similairement pour a.

(d) (1 point) Combien de solutions l'équation $(\ddagger)$ admet-elle ? Trouver ces solutions.

Question 4 (4 points)

On note $\lambda = \{AB, M\}$ le rapport de section suivant lequel le point M partage le vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire

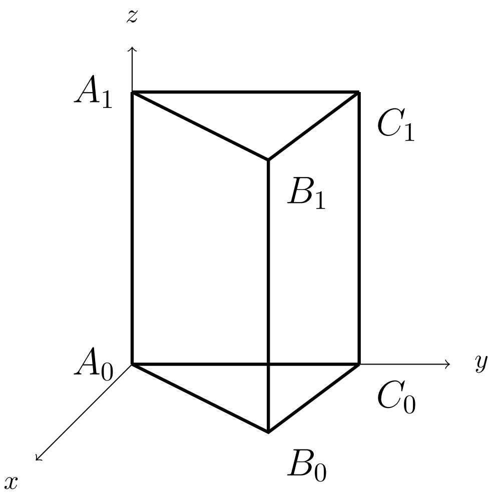
$$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}.$$

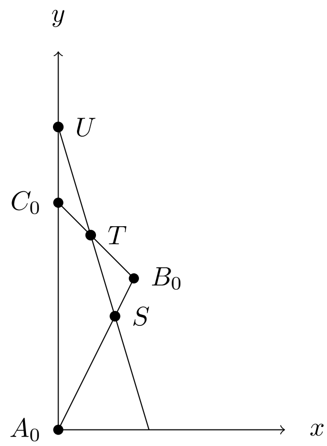
On considère un prisme à bases triangulaires comme représenté sur le schéma ci-dessous (à gauche), sur lequel on place un repère orthonormé de sorte que l'on ait les trois points $A_0(0,0,0)$, $C_0(0,3,0)$ et $B_1(1,2,5)$.
On prend sur la diagonale A_0B_1 un point P tel que $\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4}$.
Π est le plan passant par P et parallèle aux diagonales A_1C_0 et B_0C_1. Le plan Π coupe la droite C_0C_1 au point R.

(a) (1 point) Montrer que l'équation cartésienne du plan Π est $20x + 5y + 3z = 25$.

(b) (1 point) Déterminer le rapport de section $\{C_0C_1, R\}$.

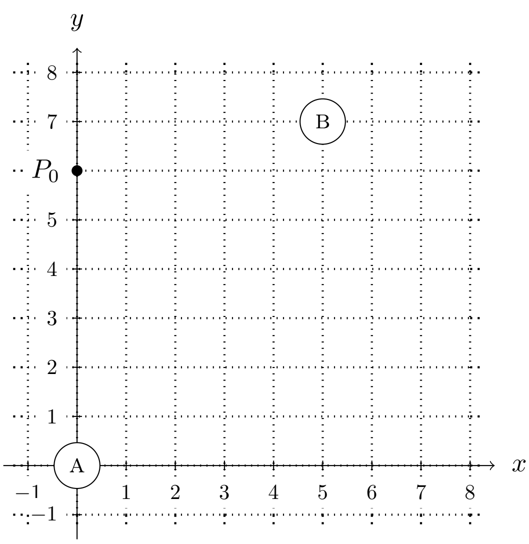
(c) (2 points) Considérons le triangle $A_0B_0C_0$. On choisit trois points alignés S, T, U de sorte que l'on puisse écrire $\lambda_1 = \{A_0B_0, S\}$, $\lambda_2 = \{B_0C_0, T\}$, $\lambda_3 = \{C_0A_0, U\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$, comme illustré ci-dessous (à droite). Le produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ est alors constant. Déterminer la valeur de cette constante.





Question 5 (4 points)

Alice (A) et Bob (B) se déplacent dans le plan de coordonnées, selon une séquence de pas de longueur 1. Ils effectuent chaque pas simultanément.
Alice démarre en $(0,0)$ et effectue chaque pas au hasard vers la droite ou vers le haut, de façon équiprobable. Bob démarre en $(5,7)$ et effectue chaque pas au hasard vers la gauche ou vers le bas, de façon équiprobable.



(a) (1 point) Quelle est la probabilité que Alice et Bob se rencontrent au point $P_0(0,6)$?

(b) (1 point) Déterminer les autres points $(P_1, P_2, \ldots)$ où il est possible que Alice et Bob se recontrent.

(c) (2 points) Quelle est la probabilité que Alice et Bob se rencontrent ?