Zusätzliche Prüfung POL

Analysis - Algebra - Geometrie - Wahrscheinlichkeitsrechnung

5 Fragen - 4 Stunden

1. Die Abbildungen bei bestimmten Fragen sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
2. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
3. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., in Ihren Antworten unverändert stehen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie das Polynom $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$.

(a) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass $P'(1/2) < 4$.
Hinweis: Berechnen Sie zuerst $(x-1)P(x)$.

(b) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times \ldots \times (2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4.$$

Hinweis: Sie dürfen die Logarithmusfunktion verwenden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit allgemeinem Glied $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie die ersten drei Folgenglieder und beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

(b) (1 Punkt) Beweisen Sie durch partielle Integration, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt:

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}.$$

(c) (2 Punkte) Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle $p \in \mathbb{N}_0$, gilt:

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{g(p)}{h(p)}$$

wobei $g(p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ und $h(p) = \prod_{k=1}^{p} 2k$.
Erinnerung: $\Pi_{k=1}^{N} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_N$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) (1 Punkt) Betrachten Sie in $\mathbb{C}$ folgende Gleichung: $|1+iz| = |1-iz|$, wobei $i^2 = -1$. Beweisen Sie, dass die Lösungen der Gleichung reell sind.

(b) (1 Punkt) Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie in $\mathbb{C}$ die folgende Gleichung mit der Unbekannten z

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}. \qquad (\ddagger)$$

Beweisen Sie ohne Berechnung, dass die Lösungen der Gleichung reell sind.

Hinweis: (a) kann Ihnen helfen, indem Sie zunächst den Modulus (Betrag) einer komplexen Zahl berechnen.

(c) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass die Gleichung $(\ddagger)$ in der Form $\text{cis}(2n\theta) = \text{cis}(2\alpha)$ geschrieben werden kann, für ein bestimmtes $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Erinnerung: $\text{cis}(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.

Hinweis: aufgrund von (b) können Sie davon ausgehen, dass $z = \tan\theta$, mit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, und ähnlich für a.

(d) (1 Punkt) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $(\ddagger)$? Bestimmen Sie diese Lösungen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

$\lambda = \{AB, M\}$ ist das Verhältnis, nach dem der Punkt M den Vektor $\overrightarrow{AB}$ teilt, das heißt

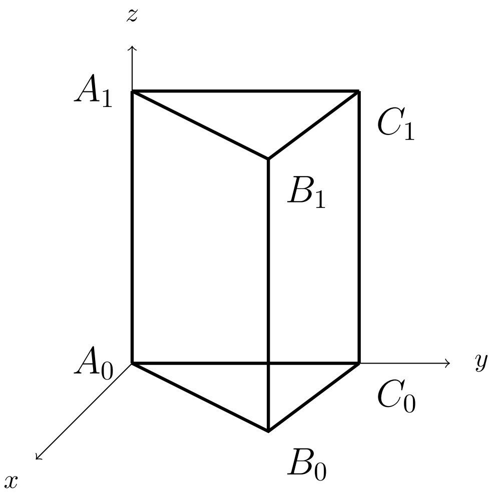
$$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}.$$

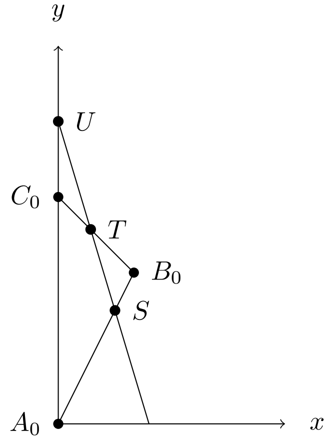
In einem orthonormalen Achsensystem ist durch die Punkte $A_0(0,0,0)$, $C_0(0,3,0)$, $B_1(1,2,5)$ ein gerades Prisma mit dreieckiger Grundfläche gegeben (siehe Abbildung links).
Auf der Diagonalen A_0B_1 ist ein Punkt P so festgelegt, dass $\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4}$.
Π ist die Ebene, die durch P geht und zu den Diagonalen A_1C_0 und B_0C_1 parallel is. Die Ebene Π schneidet die Linie C_0C_1 im Punkt R.

(**a**) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass die kartesische Gleichung der Ebene Π $20x + 5y + 3z = 25$ ist.

(**b**) (1 Punkt) Bestimmen Sie das Verhältnis $\{C_0C_1, R\}$.

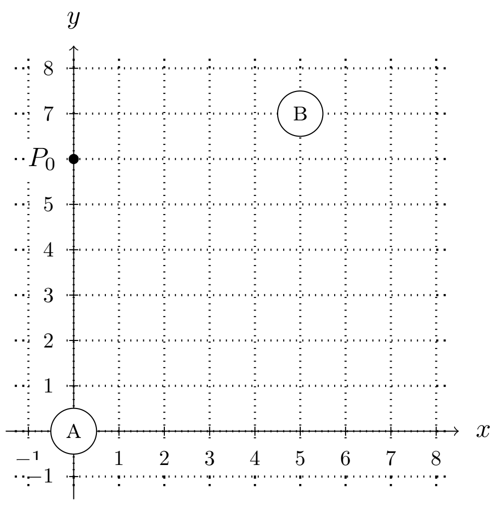
(**c**) (2 Punkte) Betrachten Sie das Dreieck $A_0B_0C_0$. Wir wählen drei kollineare Punkte S, T, U, so dass $\lambda_1 = \{A_0B_0, S\}$, $\lambda_2 = \{B_0C_0, T\}$, $\lambda_3 = \{C_0A_0, U\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$, wie unten gezeigt wird (rechts). Das Produkt $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ ist konstant. Bestimmen Sie die Werte dieser Konstanten.





Aufgabe 5 (4 Punkte)

Alice (A) und Bob (B) bewegen sich in der Koordinatenebene fort. Die Länge ihrer Schritte ist immer 1. Sie machen jeden Schritt gleichzeitig.
Alice beginnt bei $(0,0)$ und macht jeden Schritt zufällig nach rechts oder oben; die Wahrscheinlichkeit, dass sie einen Schritt nach rechts macht, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass sie einen Schritt nach oben macht.
Gleichzeitig beginnt Bob bei $(5,7)$ und macht jeden Schritt zufällig nach links oder unten; die Wahrscheinlichkeit, dass er einen Schritt nach links macht, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass er einen Schritt nach unten macht.



(**a**) (1 Punkt) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Alice und Bob im Punkt $P_0(0,6)$ treffen?

(**b**) (1 Puntk) Bestimmen Sie die weiteren Punkte $(P_1, P_2, \ldots)$, in denen sich Alice und Bob treffen können.

(**c**) (2 Punkte) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Alice und Bob überhaupt treffen?