

Vorbereiding op de Toelatingswedstrijd
van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Waarschijnlijkheidsrekenen

Bijkomende proef POL - 2021
Oplossing van Vraag 5

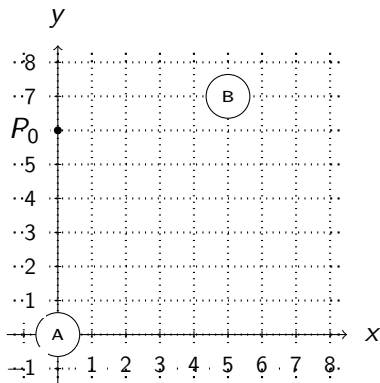
Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- ▶ Analyse
- ▶ Algebra
- ▶ Trigonometrie
- ▶ Meetkunde en Analytische Meetkunde
- ▶ Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Opsomming
Binomiale wet

Vraag (deel 1/2)

Alice (A) en Bob (B) bewegen zich in het coördinatenvlak door tegelijkertijd opeenvolgende stappen met lengte 1 te zetten. Alice begint op $(0, 0)$ en doet telkens met gelijke kansen een willekeurige stap naar rechts of naar boven. Bob begint op $(5, 7)$ en doet telkens met gelijke kansen een willekeurige stap naar links of naar beneden.



Vraag (deel 2/2)

(a) (1 punt) Wat is de kans dat Alice en Bob elkaar ontmoeten in het punt $P_0(0, 6)$?

► [Oplossing](#)

(b) (1 punt) Bepaal de andere punten (P_1, P_2, \dots) waar het mogelijk is dat Alice en Bob elkaar kunnen ontmoeten.

► [Oplossing](#)

(c) (2 punten) Wat is de kans dat Alice en Bob elkaar zullen ontmoeten?

► [Oplossing](#)

Oplossing van deelvraag (a)

← Terug naar de vraag

Alice en Bob kunnen elkaar pas ontmoeten nadat ze beiden 6 stappen zijn opgeschoven, want er zijn 12 stappen tussen hun beginposities.

Zij a_0 het aantal mogelijke trajecten van $(0, 0)$ naar P_0 en zij b_0 het aantal mogelijke trajecten van $(5, 7)$ naar P_0 . We hebben

$$a_0 = 1 \quad \text{en} \quad b_0 = \binom{6}{1} = 6.$$

Ze kunnen elk 2^6 verschillende trajecten nemen in 6 stappen. Dus is de kans dat ze elkaar in P_0 ontmoeten is

$$\frac{1}{2^{12}} a_0 b_0 = \frac{6}{2^{12}}.$$

Opmerking: Als alternatief kan men rechtstreeks in termen van waarschijnlijkheden werken. In dat geval :

- ▶ Laat α_0 de kans zijn dat Alices P_0 bereikt (na 6 stappen):

$$\alpha_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

- ▶ Stel β_0 is de kans dat Bob P_0 bereikt (na 6 stappen):

$$\beta_0 = \binom{6}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{2^6}.$$

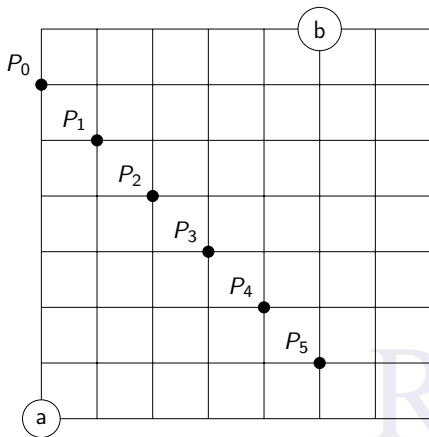
- ▶ De kans dat ze elkaar in P_0 ontmoeten is $\alpha_0 \beta_0 = \frac{6}{2^{12}}$.

Oplossing van deelvraag (b)

← Terug naar de vraag

Alice moet i stappen naar rechts doen, en Bob moet $i + 1$ stappen naar beneden doen om elkaar te ontmoeten, met $i = 0, \dots, 5$. De andere ontmoetingsplaatsen zijn dus :

$$P_1 = (1, 5), \quad P_2 = (2, 4), \quad P_3 = (3, 3), \quad P_4 = (4, 2), \quad P_5(5, 1).$$



Zij a_i het aantal mogelijke trajecten van $(0, 0)$ naar P_i en zij b_i het aantal mogelijke trajecten van $(5, 7)$ naar P_i , $i = 0, \dots, 5$. We hebben

$$a_i = \binom{6}{i} \quad \text{en} \quad b_i = \binom{6}{i+1}, \quad i = 0, \dots, 5.$$

De kans dat ze elkaar ontmoeten is

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{12}} \sum_{i=0}^5 a_i b_i &= \frac{1}{2^{12}} \sum_{i=0}^5 \binom{6}{i} \binom{6}{i+1} \\ &= \frac{1}{2^{12}} (6 + 90 + 300 + 300 + 90 + 6) = \frac{792}{2^{12}} = \frac{99}{512}. \end{aligned}$$