Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Probabilités

Epreuve complémentaire POL - 2021

Solution de la Question 5

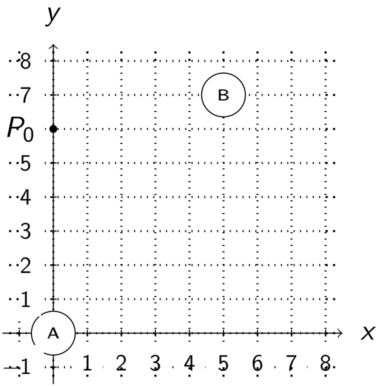
Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
- Algèbre
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique
  - Dénombrement
  - Loi binomiale

Question (partie 1/2)

Alice (A) et Bob (B) se déplacent dans le plan de coordonnées, selon une séquence de pas de longueur 1. Ils effectuent chaque pas simultanément.

Alice démarre en $(0, 0)$ et effectue chaque pas au hasard vers la droite ou vers le haut, de façon équiprobable. Bob démarre en $(5, 7)$ et effectue chaque pas au hasard vers la gauche ou vers le bas, de façon équiprobable.



Question (partie 2/2)

(a) (1 point) Quelle est la probabilité que Alice et Bob se rencontrent au point $P_0(0, 6)$?

Solution

(b) (1 point) Déterminer les autres points $(P_1, P_2, \ldots)$ où il est possible que Alice et Bob se recontrent.

Solution

(c) (2 points) Quelle est la probabilité que Alice et Bob se rencontrent ?

Solution

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

Alice et Bob ne peuvent se rencontrer qu'après s'être déplacés tous les deux de 6 pas, car il y a 12 pas entre leurs positions initiales. Soit a_0 le nombre de chemins possibles de $(0,0)$ jusqu'à P_0 et soit b_0 le nombre de chemins possibles de $(5,7)$ jusqu'à P_0. On a

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad b_0 = \binom{6}{1} = 6.$$

Ils peuvent chacun emprunter 2^6 chemins différents en 6 pas. Dès lors la probabilité qu'ils se rencontrent en P_0 est

$$\frac{1}{2^{12}} a_0 b_0 = \frac{6}{2^{12}}.$$

Remarque : On peut aussi travailler directement en termes de probabilités. Dans ce cas :

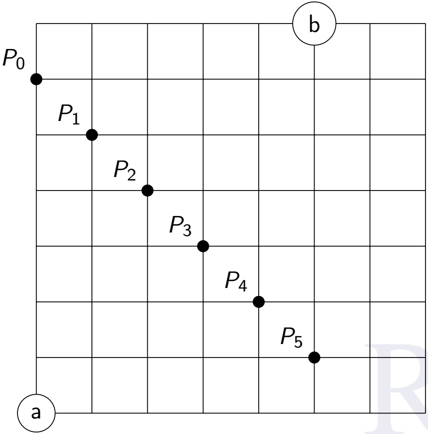
- Soit α_0 la probabilité que Alice atteigne P_0 (après 6 pas): $\alpha_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$
- Soit β_0 la probabilité que Bob atteigne P_0 (après 6 pas): $\beta_0 = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{2^6}$.
- La probabilité qu'ils se rencontrent en P_0 est $\alpha_0\beta_0 = \frac{6}{2^{12}}$.

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

Alice doit faire i pas vers la droite, et Bob doit faire $i+1$ pas vers le bas pour se rencontrer, avec $i = 0, \ldots, 5$. Les autres lieux de rencontre sont donc :

$$P_1 = (1,5), \quad P_2 = (2,4), \quad P_3 = (3,3), \quad P_4 = (4,2), \quad P_5(5,1).$$



Solution de la sous-question (c)

Retour à la question

Soit a_i le nombre de chemins possibles de $(0,0)$ à P_i et soit b_i le nombre de chemins possibles de $(5,7)$ à P_i, $i = 0, \ldots, 5$. On a

$$a_i = \binom{6}{i} \quad \text{et} \quad b_i = \binom{6}{i+1}, \qquad i = 0, \ldots, 5.$$

La probabilité qu'ils se rencontrent est

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{12}} \sum_{i=0}^{5} a_i b_i &= \frac{1}{2^{12}} \sum_{i=0}^{5} \binom{6}{i}\binom{6}{i+1} \\ &= \frac{1}{2^{12}}(6 + 90 + 300 + 300 + 90 + 6) = \frac{792}{2^{12}} = \frac{99}{512}.\end{aligned}$$