Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd
van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Meetkunde en Analytische Meetkunde

Bijkomende proef POL - 2021
Oplossing van Vraag 4

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
- Algebra
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
  - Vectoren
  - Vergelijking van een rechte
  - Vergelijking van een vlak
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag (deel 1/2)

We noteren $\lambda = \{AB, M\}$ de doorsnedeverhouding waarlangs het punt M de vector $\overrightarrow{AB}$ deelt, dat wil zeggen

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{MB}.$$

Beschouw een prisma met driehoekige basis zoals in de figuur hieronder (links), waarop we een orthonormaal assenstelsel plaatsen zodat we de volgende punten hebben : $A_0(0,0,0)$, $C_0(0,3,0)$ en $B_1(1,2,5)$.
We nemen op de diagonaal A_0B_1 een punt P zo dat $\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4}$.
Π is het vlak dat door P gaat en evenwijdig is met de diagonalen A_1C_0 en B_0C_1. Het vlak Π snijdt de rechte C_0C_1 in het punt R.

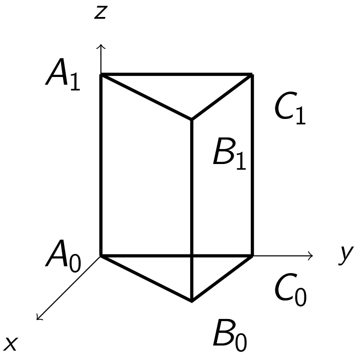
(a) (1 punt) Toon aan dat de cartesische vergelijking van het vlak Π wordt gegeven door $20x + 5y + 3z = 25$.
Oplossing

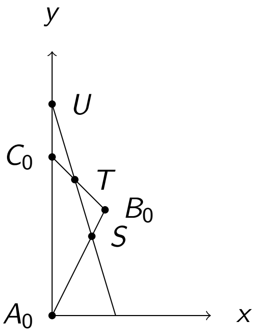
(b) (1 punt) Bepaal de doorsnedeverhouding $\{C_0C_1, R\}$.
Hint Oplossing

Vraag (deel 2/2)

(c) (2 punten) Beschouw de driehoek $A_0B_0C_0$. We kiezen drie collineaire punten S, T, U zodat we kunnen schrijven $\lambda_1 = \{A_0B_0, S\}$, $\lambda_2 = \{B_0C_0, T\}$, $\lambda_3 = \{C_0A_0, U\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$, zoals hieronder afgebeeld (rechts). Het product $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ is constant. Bepaal de waarde van die constante.

Hint Oplossing





Oplossing van deelvraag (a)

◂ Terug naar de vraag

We bepalen eerst de coördinaten van P (dat is het eindpunt van de vector $\vec{P}$):

$$\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4} \iff \overrightarrow{A_0P} = \frac{5}{4}\overrightarrow{PB_1} \iff \vec{P} - \vec{A_0} = \frac{5}{4}(\vec{B_1} - \vec{P})$$

en dus

$$\vec{P} = \frac{4}{9}\frac{5}{4}\vec{B_1} = \frac{5}{9}\vec{B_1} = \frac{5}{9}(1, 2, 5).$$

Het vlak Π is evenwijdig met de volgende vectoren:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1C_0} &= (0, 3, 0) - (0, 0, 5) = (0, 3, -5) \\ \overrightarrow{B_0C_1} &= (0, 3, 5) - (1, 2, 0) = (-1, 1, 5). \end{aligned}$$

Er zijn verschillende manieren om de vergelijking van het vlak te verkrijgen. Neem bijvoorbeeld aan dat $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$ een richting bepaalt die normaal is aan Π. We hebben

$$\begin{aligned} (0, 3, -5) \cdot (n_1, n_2, n_3) &= 0 \\ (-1, 1, 5) \cdot (n_1, n_3, n_3) &= 0. \end{aligned}$$

Als we deze twee vergelijkingen optellen, bekomen we $-n_1 + 4n_2 = 0$. Als we $n_2 = 1$ laten, dan is $n_1 = 4$ en met behulp van de eerste vergelijking, $n_3 = \frac{3}{5}$. De normaalrichting is dus $(1, 4, 3/5)$ en de vergelijking van het vlak is

$$20x + 5y + 3z = c,$$

waarbij $c = 25$ wegens $P \in \Pi$.

Hint voor deelvraag (b)

Terug naar de vraag

We kunnen schrijven dat $R = (0, 3, z_r)$, waarbij z_r bepaald wordt door het feit dat $R \in \Pi$.

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Aangezien R op de lijn C_0C_1 ligt, kunnen we schrijven dat

$$R = (0, 3, z_r),$$

waarbij z_r bepaald wordt door het feit dat $R \in \Pi$:

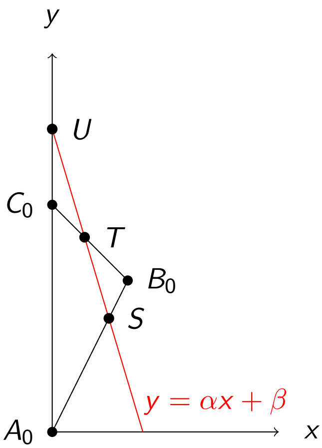
$$15 + 3z_r = 25 \Rightarrow z_r = \frac{10}{3}.$$

Daarom

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{C_0R} = \{C_0C_1, R\}\overrightarrow{RC_1} \\ \iff \quad & \left(0, 0, \frac{10}{3}\right) = \{C_0C_1, R\}\left(0, 0, 5 - \frac{10}{3}\right) \\ \iff \quad & \{C_0C_1, R\} = 2. \end{aligned}$$

Hint voor deelvraag (c)

Terug naar de vraag



- Voor α en β kunnen numerieke waarden worden gekozen.
- Druk $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ uit in functie van α en β.

Oplossing van deelvraag (c) – (deel 1/3)

Terug naar de vraag

Om het eenvoudig te houden beschouwen we S, T, U als punten van het (x, y)-vlak, en laten we de derde coördinaat weg:

$$S = (x_s, y_s), \qquad T = (x_t, y_t), \qquad U = (x_u, y_u).$$

We bekomen

$$\begin{array}{lclcl}
\lambda_1 = \{A_0B_0, S\} & \Rightarrow & S \in A_0B_0 & \Rightarrow & y_s = 2x_s \\
\lambda_2 = \{B_0C_0, T\} & \Rightarrow & T \in B_0C_0 & \Rightarrow & y_t = 3 - x_t \\
\lambda_3 = \{C_0A_0, U\} & \Rightarrow & U \in C_0A_0 & \Rightarrow & x_u = 0.
\end{array}$$

Gebruik makend van het feit dat S, T, U behoren tot dezelfde rechte met vergelijking $y = \alpha x + \beta$, hebben we verder dat :

$$\begin{aligned}
2x_s = \alpha x_s + \beta \qquad &\Rightarrow \qquad x_s = \frac{\beta}{2 - \alpha} \\
3 - x_t = \alpha x_t + \beta \qquad &\Rightarrow \qquad x_t = \frac{-\beta + 3}{\alpha + 1} \\
y_u = \beta.
\end{aligned}$$

Merk op dat $\alpha \neq 2$ en $\alpha \neq -1$, anders zijn S, T niet welbepaald. Daarom is delen door $2 - \alpha$ of $\alpha + 1$ toegestaan.

Oplossing van deelvraag (c) – (deel 2/3)

Terug naar de vraag

De positie van S, T, U wordt volledig bepaald door de positie van de rechte die deze drie punten verbindt, m.a.w. door α en β. We willen het product $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ uitdrukken met behulp van deze twee parameters. Door de definitie van de λ_i's hebben we

$$\begin{aligned} x_s &= \lambda_1(1 - x_s) \\ x_t - 1 &= \lambda_2(-x_t) \\ y_u - 3 &= \lambda_3(-y_u), \end{aligned}$$

met als gevolg

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{x_s}{1 - x_s}\frac{x_t - 1}{-x_t}\frac{y_u - 3}{-y_u}.$$

Als we x_s, x_t, y_u vervangen door hun uitdrukkingen in termen van α, β, bekomen we

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{\beta}{2 - \alpha - \beta}\frac{-\beta + 3 - \alpha - 1}{\beta - 3}\frac{\beta - 3}{-\beta} = -1.$$

Oplossing van deelvraag (c) – (deel 3/3)

Terug naar de vraag

Opmerking: Zoals vermeld in vraag (c), is het product $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ constant. Daarom mag men voor de berekening willekeurig drie uitgelijnde punten S, T, U kiezen. Met andere woorden, kunnen we willekeurige waarden kiezen voor α en β. De enige beperking is dat S verschillend moet zijn van A_0 en B_0 (en evenzo voor T en U) omdat $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$.

- A_0 ligt niet op de rechte $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \beta \neq 0$
- B_0 ligt niet op de rechte $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \alpha + \beta \neq 2$
- C_0 ligt niet op de rechte $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \beta \neq 3$

We zien dat deze 3 voorwaarden impliceren dat de vereenvoudiging die we in de laatste stap van de oplossing hebben uitgevoerd, geldig is.