Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Géométrie

Epreuve complémentaire POL - 2021

Solution de la Question 4

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
- Algèbre
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
  - Vecteurs
  - Equations de droite
  - Equations de plan
- Probabilités et Statistique

Question (partie 1/2)

On note $\lambda = \{AB, M\}$ le rapport de section suivant lequel le point M partage le vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}.$$

On considère un prisme à bases triangulaires comme représenté sur le schéma ci-dessous (à gauche), sur lequel on place un repère orthonormé de sorte que l'on ait les trois points $A_0(0,0,0)$, $C_0(0,3,0)$ et $B_1(1,2,5)$.
On prend sur la diagonale A_0B_1 un point P tel que $\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4}$.
Π est le plan passant par P et parallèle aux diagonales A_1C_0 et B_0C_1. Le plan Π coupe la droite C_0C_1 au point R.

(a) (1 point) Montrer que l'équation cartésienne du plan Π est $20x + 5y + 3z = 25$.

Solution

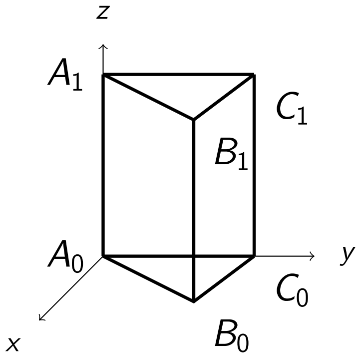
(b) (1 point) Déterminer le rapport de section $\{C_0C_1, R\}$.

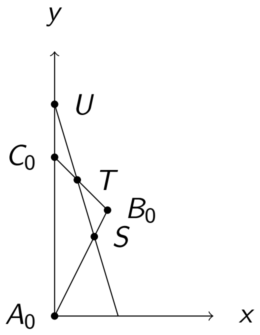
Indication Solution

Question (partie 2/2)

(c) (2 points) Considérons le triangle $A_0B_0C_0$. On choisit trois points alignés S, T, U de sorte que l'on puisse écrire $\lambda_1 = \{A_0B_0, S\}$, $\lambda_2 = \{B_0C_0, T\}$, $\lambda_3 = \{C_0A_0, U\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$, comme illustré ci-dessous (à droite). Le produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ est alors constant. Déterminer la valeur de cette constante.

▸ Indication ▸ Solution





Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

On détermine d'abord les coordonnées de P (qui est l'extrémité du vecteur $\vec{P}$) :

$$\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4} \iff \overrightarrow{A_0P} = \frac{5}{4}\overrightarrow{PB_1} \iff \vec{P} - \vec{A_0} = \frac{5}{4}(\vec{B_1} - \vec{P})$$

et donc

$$\vec{P} = \frac{4}{9}\frac{5}{4}\vec{B_1} = \frac{5}{9}\vec{B_1} = \frac{5}{9}(1, 2, 5).$$

Le plan Π est parallèle aux vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1C_0} &= (0, 3, 0) - (0, 0, 5) = (0, 3, -5) \\ \overrightarrow{B_0C_1} &= (0, 3, 5) - (1, 2, 0) = (-1, 1, 5). \end{aligned}$$

Il existe différentes façons d'obtenir l'équation du plan. Par exemple, supposons que $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$ détermine la direction normale à Π. On a

$$\begin{aligned} (0, 3, -5) \cdot (n_1, n_2, n_3) &= 0 \\ (-1, 1, 5) \cdot (n_1, n_3, n_3) &= 0. \end{aligned}$$

En additionnant ces deux équations, on obtient $-n_1 + 4n_2 = 0$. Si on choisit $n_2 = 1$, alors $n_1 = 4$ et en utilisant la première équation, $n_3 = \frac{3}{5}$. La direction normale est donc $(1, 4, 3/5)$ et l'équation du plan est

$$20x + 5y + 3z = c,$$

où $c = 25$ vu que $P \in \Pi$.

Indication pour la sous-question (b)

Retour à la question

On peut écrire $R = (0, 3, z_r)$, où z_r est déterminé par le fait que $R \in \Pi$.

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

Puisque R appartient à la droite C_0C_1, on peut écrire

$$R = (0, 3, z_r),$$

où z_r est déterminé par le fait que $R \in \Pi$:

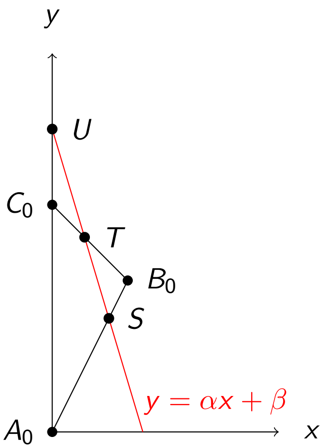
$$15 + 3z_r = 25 \Rightarrow z_r = \frac{10}{3}.$$

De là,

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{C_0R} = \{C_0C_1, R\}\overrightarrow{RC_1} \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(0, 0, \frac{10}{3}\right) = \{C_0C_1, R\}\left(0, 0, 5 - \frac{10}{3}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & \{C_0C_1, R\} = 2. \end{aligned}$$

Indication pour la sous-question (c)

◂ Retour à la question



- On peut choisir des valeurs numériques pour α et β.
- Exprimer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ en fonction de α et β.

Solution de la sous-question (c) – (partie 1/3)

◂ Retour à la question

Pour simplifier, on considère les points S, T, U comme des points du plan (x, y), et on omet la troisième coordonnée :

$$S = (x_s, y_s), \qquad T = (x_t, y_t), \qquad U = (x_u, y_u).$$

On a

$$\begin{array}{lcccl}
\lambda_1 = \{A_0B_0, S\} & \Rightarrow & S \in A_0B_0 & \Rightarrow & y_s = 2x_s \\
\lambda_2 = \{B_0C_0, T\} & \Rightarrow & T \in B_0C_0 & \Rightarrow & y_t = 3 - x_t \\
\lambda_3 = \{C_0A_0, U\} & \Rightarrow & U \in C_0A_0 & \Rightarrow & x_u = 0.
\end{array}$$

Vu que S, T, U appartiennent à la même droite d'équation $y = \alpha x + \beta$, on trouve aussi que :

$$\begin{array}{rcl}
2x_s = \alpha x_s + \beta & \Rightarrow & x_s = \dfrac{\beta}{2-\alpha} \\
3 - x_t = \alpha x_t + \beta & \Rightarrow & x_t = \dfrac{-\beta+3}{\alpha+1} \\
y_u = \beta. & &
\end{array}$$

Observons que $\alpha \neq 2$ et $\alpha \neq -1$ sinon S, T ne sont pas bien définis. Il est donc permis de diviser par $2 - \alpha$ ou $\alpha + 1$.

Solution de la sous-question (c) – (partie 2/3)

Retour à la question

La position de S, T, U est entièrement déterminée par la position de la droite qui relie ces trois points, autrement dit, par α et β. Nous voulons exprimer le produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ en utilisant ces deux paramètres. Par définition des λ_i, on a

$$\begin{aligned} x_s &= \lambda_1(1 - x_s) \\ x_t - 1 &= \lambda_2(-x_t) \\ y_u - 3 &= \lambda_3(-y_u), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{x_s}{1 - x_s}\frac{x_t - 1}{-x_t}\frac{y_u - 3}{-y_u}.$$

En remplaçant x_s, x_t, y_u par leur expression en fonction de α, β, on obtient

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{\beta}{2 - \alpha - \beta}\frac{-\beta + 3 - \alpha - 1}{\beta - 3}\frac{\beta - 3}{-\beta} = -1.$$

Solution de la sous-question (c) – (partie 3/3)

Retour à la question

Remarque : Comme mentionné dans la question (c), le produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ est constant. Par conséquent, on peut choisir *n'importe quels* trois points alignés S, T, U pour effectuer le calcul. En d'autres termes, on peut choisir des valeurs arbitraires pour α et β. La seule contrainte est que S doit être différent de A_0 et B_0 (et de même pour T et U) car $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$.

- A_0 n'est pas sur la droite $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \beta \neq 0$
- B_0 n'est pas sur la droite $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \alpha + \beta \neq 2$
- C_0 n'est pas sur la droite $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \beta \neq 3$

Nous voyons que ces 3 conditions impliquent que la simplification que nous avons effectuée dans la dernière étape de la solution est valide.