Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Algebra

Bijkomende proef POL - 2021
Oplossing van Vraag 3

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
- Algebra
  - Complexe getallen
  - Veeltermen
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag (deel 1/2)

(a) (1 punt) Gegeven: de volgende vergelijking in $\mathbb{C}$, met $i^2 = -1$: $|1 + iz| = |1 - iz|$. Toon aan dat de oplossingen van de vergelijking reëel zijn.

Oplossing

(b) (1 punt) Gegeven: de volgende vergelijking in $\mathbb{C}$ (met onbekende z), met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^n = \frac{1 + ia}{1 - ia}. \qquad (\ddagger)$$

Toon aan dat de oplossingen van de vergelijking reëel zijn, zonder die te berekenen.
Hint: maak gebruik van het puntje (a) door een modulusberekening.

Oplossing

Vraag (deel 2/2)

(c) (1 punt) Toon aan dat de vergelijking (‡) geschreven kan worden onder de vorm $\mathrm{cis}(2n\theta) = \mathrm{cis}(2\alpha)$, voor een bepaalde $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Ter herinnering: $\mathrm{cis}(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.
Hint: op basis van het vorige puntje kan men stellen dat $z = \tan\theta$, met $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, en op dezelfde manier te werk gaan voor a.

Oplossing

(d) (1 punt) Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking (‡)? Zoek die oplossingen.

Oplossing

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

Wij geven twee methoden aan om de vergelijking op te lossen, waaruit zal blijken dat de oplossingen van de vergelijking reëel zijn.

Methode 1 Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$. We vinden

$$\begin{aligned} |1+iz| = |1-z| &\iff |1+i(x+iy)| = |1-(x+iy)| \\ &\iff |1-y+ix| = |1+y-ix| \\ &\iff (1-y)^2 + x^2 = (1+y)^2 + x^2 \\ &\iff y = 0. \end{aligned}$$

De oplossing is dus $S = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) = 0\}$.

Methode 2 Gezien $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, bekomen we

$$\begin{aligned} |1+iz| = |1-z| &\iff |1+iz|^2 = |1-iz|^2 \\ &\iff (1+iz)\overline{(1+iz)} = (1-iz)\overline{(1-iz)} \\ &\iff (1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z}) \\ &\iff 1 - i\bar{z} + iz + z\bar{z} = 1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z} \\ &\iff -i\bar{z} + iz = i\bar{z} - iz \\ &\iff z = \bar{z}. \end{aligned}$$

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Met behulp van de hint, zien we dat

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \Rightarrow \left|\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right| = \left|\frac{1+ia}{1-ia}\right|$$

Als we vaststellen dat $\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = 1$, dan hebben we ook dat

$$\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n = 1$$

wat inhoudt dat $|1+iz| = |1-iz|$. Met behulp van (**a**) impliceert dit dat $z \in \mathbb{R}$.

Oplossing van deelvraag (c)

Terug naar de vraag

Zoals de hint aangeeft, bestaat er voor $z \in \mathbb{R}$ een unieke $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ zo dat $z = \tan\theta$. Merk op dat $\cos\theta \neq 0$. We berekenen

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{\mathrm{cis}(\theta)}{\mathrm{cis}(-\theta)} = \mathrm{cis}(2\theta)\left(= e^{2i\theta}\right).$$

Evenzo, met $a = \tan\alpha$ voor een zekere $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ bekomen we

$$\frac{1+ia}{1-ia} = \mathrm{cis}(2\alpha)\left(= e^{2i\alpha}\right).$$

Vandaar,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \iff \mathrm{cis}(2n\theta) = \mathrm{cis}(2\alpha)\left(\iff e^{2in\theta} = e^{2i\alpha}\right).$$

Oplossing van deelvraag (d)

Terug naar de vraag

Aangezien $z \in \mathbb{R}$, $1 - iz \neq 0$ en de vergelijking is equivalent met de volgende graad n polynomiale vergelijking,

$$(1 + iz)^n - \frac{1 + ia}{1 - ia}(1 - iz)^n = 0,$$

die precies n oplossingen heeft (geteld met multipliciteit), volgens de fundamentele stelling van de algebra.
De oplossing van (‡) wordt verkregen met behulp van de cis vorm (of exponentiële vorm):

$$\mathrm{cis}(2n\theta) = \mathrm{cis}(2\alpha) \iff 2n\theta = 2\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tot besluit worden de n oplossingen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ gegeven door

$$z_k = \tan\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$