Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Algèbre

Epreuve complémentaire POL - 2021

Solution de la Question 3

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
- Algèbre
  - Polynômes
  - Nombres complexes
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique

Question (partie 1/2)

(a) (1 point) On donne l'équation suivante dans $\mathbb{C}$, avec $i^2 = -1$: $|1 + iz| = |1 - iz|$. Montrer que les solutions sont réelles.

Solution

(b) (1 point) On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z, avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}. \qquad (\ddagger)$$

Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles.
Indication: se ramener au point (a) par un calcul de module.

Solution

Question (partie 2/2)

(c) (1 point) Montrer que l'équation (‡) peut s'écrire sous la forme $\mathrm{cis}(2n\theta) = \mathrm{cis}(2\alpha)$, pour un certain $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Rappel: $\mathrm{cis}(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.
Indication: en vertu du point précédent on peut poser $z = \tan\theta$, avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et procéder similairement pour a.

▸ Solution

(d) (1 point) Combien de solutions l'équation (‡) admet-elle ? Trouver ces solutions.

▸ Solution

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

Nous indiquons deux méthodes pour résoudre l'équation, qui montreront que les solutions sont les réels.

Méthode 1 Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On trouve

$$\begin{aligned} |1+iz| = |1-z| &\iff |1+i(x+iy)| = |1-(x+iy)| \\ &\iff |1-y+ix| = |1+y-ix| \\ &\iff (1-y)^2 + x^2 = (1+y)^2 + x^2 \\ &\iff y = 0. \end{aligned}$$

De là, la solution est $S = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) = 0\}$.

Méthode 2 En utilisant le fait que $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ for $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on obtient

$$\begin{aligned} |1+iz| = |1-z| &\iff |1+iz|^2 = |1-iz|^2 \\ &\iff (1+iz)\overline{(1+iz)} = (1-iz)\overline{(1-iz)} \\ &\iff (1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z}) \\ &\iff 1 - i\bar{z} + iz + z\bar{z} = 1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z} \\ &\iff -i\bar{z} + iz = i\bar{z} - iz \\ &\iff z = \bar{z}. \end{aligned}$$

Solution de la sous-question (b)

◂ Retour à la question

En utilisant l'indication, on observe que

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \Rightarrow \left|\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right| = \left|\frac{1+ia}{1-ia}\right|$$

Vu que $\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = 1$, on a aussi que

$$\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n = 1$$

ce qui implique que $|1+iz| = |1-iz|$. Vu (**a**) cela implique que $z \in \mathbb{R}$.

Solution de la sous-question (c)

Retour à la question

Suivant l'indication, puisque $z \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $z = \tan\theta$. Observez que $\cos\theta \neq 0$. On calcule

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{\mathrm{cis}(\theta)}{\mathrm{cis}(-\theta)} = \mathrm{cis}(2\theta) \left(= e^{2i\theta}\right).$$

De même, avec $a = \tan\alpha$ pour un certain $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a

$$\frac{1+ia}{1-ia} = \mathrm{cis}(2\alpha) \left(= e^{2i\alpha}\right).$$

De là,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \iff \mathrm{cis}(2n\theta) = \mathrm{cis}(2\alpha) \left(\iff e^{2in\theta} = e^{2i\alpha}\right).$$

Solution de la sous-question (d)

Retour à la question

Vu que $z \in \mathbb{R}$, $1 - iz \neq 0$ et l'équation est équivalente avec l'équation polynomiale de degré n suivante :

$$(1+iz)^n - \frac{1+ia}{1-ia}(1-iz)^n = 0,$$

qui possède exactement n solutions (comptées avec leur multiplicité), par le théorème fondamental de l'algèbre.
La solution de (‡) est obtenue est utilisant la forme cis (ou la forme exponentielle) :

$$\mathrm{cis}(2n\theta) = \mathrm{cis}(2\alpha) \iff 2n\theta = 2\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En conclusion, les n solutions $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ sont données par

$$z_k = \tan\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$