Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Analyse

Bijkomende proef POL - 2021
Oplossing van Vraag 2

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
  - Rijen en inductie
  - Integralen
- Algebra
- Trigonometrie
  - Formules
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag

De algemene term van de rij $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wordt gegeven door

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

(a) (1 point) Bereken de eerste drie termen van de rij en toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt.$$

▸ Hint ▸ Oplossing

(b) (1 point) Toon aan de hand van partiële integratie aan dat voor alle natuurlijke n verschillend van nul geldt dat

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}.$$

▸ Hint ▸ Oplossing

(c) (2 points) Bewijs met inductie dat voor alle $p \in \mathbb{N}_0$ geldt dat

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{g(p)}{h(p)}$$

met $g(p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ en $h(p) = \prod_{k=1}^{p} 2k$.
Ter herinnering: $\Pi_{k=1}^{N} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_N$.

▸ Hint ▸ Oplossing

Hint voor deelvraag (a)

Terug naar de vraag

- Ga voor I_0 en I_1 te werk door directe berekening.
- Gebruik voor I_2 de formule van Carnot.
- Voor het laatste deel van de deelvraag, gebruik een verandering van variabele.

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

Door directe berekening,

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t))\, dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Met behulp van een verandering van variabele $x := \frac{\pi}{2} - t$, bekomen we

$$I_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(\pi/2 - x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx.$$

Hint voor deelvraag (b)

Terug naar de vraag

- Bereken I_{n+1} door partiële integratie, $\int udv = uv - \int vdu$, met $u = \sin^n t$ en $v = \sin t$.
- Dit geeft een uitdrukking voor I_{n+1} die I_{n-1} en I_{n+1} omvat.
- Leid $(n+1)I_{n+1}$ af als een functie van n en I_{n-1}.

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Door partieel te integreren, voor $n \in \mathbb{N}_0$, vinden we

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^n t \sin t \, dt \\
&= \big[-\cos t \sin^n t \big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} n \sin^{n-1} t \, \cos^2 t \, dt \\
&= n \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \, (1 - \sin^2 t) dt \\
&= n \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \, dt - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \, dt \right) \\
&= n I_{n-1} - n I_{n+1},
\end{aligned}
$$

en het resultaat volgt direct.

Hint voor deelvraag (c)

Terug naar de vraag

Pas, zoals gesuggereerd, de methode van bewijs door inductie toe:

- Ga na dat de eigenschap waar is voor $p = 1$.
- Toon dan aan dat als de eigenschap waar is voor een zekere $p \in \mathbb{N}_0$, ze ook waar is voor $p + 1$. Om dit te doen:
  - bereken $I_{2(p+1)}$ met behulp van het resultaat van deelvraag (b);
  - men moet kunnen bewijzen dat

$$I_{2(p+1)} = \frac{\pi}{2} \frac{g(p+1)}{h(p+1)}.$$

Oplossing van deelvraag (c)

Terug naar de vraag

De eigenschap is waar voor $p = 1$ omdat $I_2 = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}\frac{g(1)}{h(1)} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}$.
Laten we aannemen (recurrentiehypothese) dat de eigenschap waar is voor $p \in \mathbb{N}_0$. We berekenen

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} \overset{(1)}{=} \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \overset{(2)}{=} \frac{\pi}{2}\frac{2p+1}{2p+2}\frac{g(p)}{h(p)} \overset{(3)}{=} \frac{\pi}{2}\frac{g(p+1)}{h(p+1)},$$

waarbij

(1) gerechtvaardigd wordt door deelvraag (b)

(2) de recurrentiehypothese gebruikt

(3) gebaseerd is op de volgende twee relaties:

$$(2p+1)g(p) = \big(2(p+1)-1\big)\prod_{k=1}^{p}(2k-1) = \prod_{k=1}^{p+1}(2k-1) = g(p+1),$$

$$(2p+2)h(p) = 2(p+1)\prod_{k=1}^{p}2k = \prod_{k=1}^{p+1}2k = h(p+1).$$