Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Analyse

Epreuve complémentaire POL - 2021

Solution de la Question 2

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
  - Suites et récurrence
  - Intégrales
- Algèbre
- Trigonométrie
  - Formules usuelles
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique

Question

Le terme général de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

(a) (1 point) Calculer les trois premiers termes de la suite, et prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt.$$

▸ Indication ▸ Solution

(b) (1 point) Par intégration par parties, prouver que pour tout naturel n non nul, on a

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}.$$

▸ Indication ▸ Solution

(c) (2 points) Prouver par récurrence que pour $p \in \mathbb{N}_0$, on a

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{g(p)}{h(p)}$$

avec $g(p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ et $h(p) = \prod_{k=1}^{p} 2k$.
Rappel: $\Pi_{k=1}^{N} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_N$.

▸ Indication ▸ Solution

Indication pour la sous-question (a)

Retour à la question

- Pour I_0 et I_1, procéder par un calcul direct.
- Pour I_2, utiliser la formule de Carnot.
- Pour la dernière partie de la sous-question, utiliser un changement de variable.

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

Par un calcul direct,

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

A l'aide d'un changement de variable $x := \frac{\pi}{2} - t$, on obient

$$I_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(\pi/2 - x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Indication pour la sous-question (b)

Retour à la question

- Calculer I_{n+1} par intégration par parties, $\int u dv = uv - \int v du$, en posant $u = \sin^n t$ et $v = \sin t$.
- Cela permet d'obtenir une expression de I_{n+1} qui fait intervenir I_{n-1} et I_{n+1}.
- En déduire $(n+1)I_{n+1}$ en fonction de n et de I_{n-1}.

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

En intégrant par parties, pour $n \in \mathbb{N}_0$, on trouve

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^n t \sin t \, dt \\
&= \Big[-\cos t \sin^n t \Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} n \sin^{n-1} t \, \cos^2 t \, dt \\
&= n \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \, (1 - \sin^2 t) dt \\
&= n \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \, dt - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \, dt \right) \\
&= n I_{n-1} - n I_{n+1},
\end{aligned}
$$

et le résultat suit directement.

Indication pour la sous-question (c)

◂ Retour à la question

Appliquer, comme suggéré, la méthode de preuve par récurrence:

- Vérifier que la propriété est vraie pour $p = 1$.
- Ensuite, montrer que si la propriété est vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}_0$, alors elle est aussi vraie pour $p + 1$. Pour cela:
  - calculer $I_{2(p+1)}$ en utilisant le résultat de la sous-question (b);
  - on doit arriver à prouver que

$$I_{2(p+1)} = \frac{\pi}{2} \frac{g(p+1)}{h(p+1)}.$$

Solution de la sous-question (c)

Retour à la question

La propriété est vraie pour $p = 1$ vu que $I_2 = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}\frac{g(1)}{h(1)} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}$.
Supposons (hypothèse de récurrence) que la propriété est vraie pour $p \in \mathbb{N}_0$. On calcule

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} \overset{(1)}{=} \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \overset{(2)}{=} \frac{\pi}{2}\frac{2p+1}{2p+2}\frac{g(p)}{h(p)} \overset{(3)}{=} \frac{\pi}{2}\frac{g(p+1)}{h(p+1)},$$

où

(1) est justifié par la sous-question (b)

(2) utilise l'hypothèse de récurrence

(3) est basé sur les deux relations suivantes :

$$(2p+1)g(p) = \big(2(p+1)-1\big)\prod_{k=1}^{p}(2k-1) = \prod_{k=1}^{p+1}(2k-1) = g(p+1),$$

$$(2p+2)h(p) = 2(p+1)\prod_{k=1}^{p} 2k = \prod_{k=1}^{p+1} 2k = h(p+1).$$