Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Algebra

Bijkomende proef POL - 2021

Oplossing van Vraag 1

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
  - Exponenten en logaritmen
- Algebra
  - Veeltermen
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag

Gegeven: de veelterm $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$, met $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) (2 punten) Bewijs dat $P'(1/2) < 4$.
Hint: bereken eerst $(x-1)P(x)$.
Hint Oplossing

(b) (2 punten) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ geldt dat

$$2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times \ldots \times (2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4.$$

Hint: gebruik de logaritmische functie.
Hint Oplossing

Hint voor deelvraag (a)

Terug naar de vraag

- Voor $x \neq 1$, toon aan dat $P(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.
- Bereken dan de afgeleide van deze uitdrukking.
- Substitueer $x = \frac{1}{2}$ in de uitdrukking voor $P'(x)$.

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

Volgens de hint, berekenen we :

$$(x-1)P(x) = x^{n+1}+x^n+\ldots+x-(x^n+x^{n-1}+\ldots+1) = x^{n+1}-1.$$

Als gevolg, voor $x \neq 1$, $P(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Dus, voor $x \neq 1$,

$$P'(x) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Voor $x = 1/2$ geeft dit

$$P'(1/2) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{(n+1)}{2^n} + 1}{\frac{1}{4}} = 4\left(\frac{1}{2^{n+1}}(n-2(n+1))+1\right)$$
$$= 4\left(1 - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) < 4.$$

Hint voor deelvraag (b)

Terug naar de vraag

- Als we de logaritme nemen van de uitdrukking die we moeten aantonen, krijgen we

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} k \ln(2) < 2 \ln(2).$$

- Laat vervolgens 4 verschijnen in het rechterlid door te vermenigvuldigen met $\frac{2}{\ln(2)}$.
- Merk dan op dat $P'(1/2)$ in het linkerlid voorkomt. Om dit te verwezenlijken, merk op dat

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

We moeten bewijzen dat

$$\prod_{k=1}^{n} (2^k)^{\frac{1}{2^k}} < 4,$$

of equivalent, omdat de functie ln strikt stijgend is op haar domein,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} k \ln(2) < 2 \ln(2).$$

Door beide zijden te vermenigvuldigen met $\frac{2}{\ln(2)}$ krijgen we

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} < 4.$$

Het linkerlid is gelijk aan $P'(1/2)$ en dat de bovenstaande ongelijkheid geldt, volgt dan uit (**a**).