Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Algèbre

Epreuve complémentaire POL - 2021

Solution de la Question 1

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
  - Exposants et logarithmes
- Algèbre
  - Polynômes
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique

Question

On donne le polynôme $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$, avec $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) (2 points) Prouver que $P'(1/2) < 4$.
Indication : commencer par calculer $(x-1)P(x)$.

▸ Indication ▸ Solution

(b) (2 points) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ on a

$$2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times \ldots \times (2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4.$$

Indication: on pourra utiliser la fonction logarithme.

▸ Indication ▸ Solution

Indication pour la sous-question (a)

Retour à la question

- Pour $x \neq 1$, montrer que $P(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.
- Ensuite, dériver cette expression.
- Substituer $x = \frac{1}{2}$ dans l'expression de $P'(x)$.

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

Suivant l'indication, on calcule :

$$(x-1)P(x) = x^{n+1}+x^{n}+\ldots+x-(x^{n}+x^{n-1}+\ldots+1) = x^{n+1}-1.$$

De là, pour $x \neq 1$, $P(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Donc, pour $x \neq 1$,

$$P'(x) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^{n}+1}{(x-1)^2}.$$

Pour $x = 1/2$ cela donne

$$P'(1/2) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{(n+1)}{2^n} + 1}{\frac{1}{4}} = 4\left(\frac{1}{2^{n+1}}(n-2(n+1))+1\right)$$
$$= 4\left(1-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right) < 4.$$

Indication pour la sous-question (b)

Retour à la question

- En prenant le logarithme de l'expression à démontrer, on se ramène à
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} k \ln(2) < 2 \ln(2).$$
- Ensuite, faire apparaître 4 dans le membre de droite en multipliant par $\frac{2}{\ln(2)}$.
- Observer alors que $P'(1/2)$ apparait dans le membre de gauche. Pour cela, on remarquera que
$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

On doit prouver que

$$\prod_{k=1}^{n} (2^k)^{\frac{1}{2^k}} < 4,$$

ou de façon équivalente, vu que la fonction ln est strictement croissante sur son domaine,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} k \ln(2) < 2 \ln(2).$$

En multipliant les deux membres par $\frac{2}{\ln(2)}$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} < 4.$$

Le membre de gauche est égal à $P'(1/2)$ et le fait que l'inégalité ci-dessus soit vraie est donc une conséquence de (**a**).