Proof POL

2020 Analyse - Ruimtemeetkunde - Rijen en reeksen - Complexe getallen Reeks A

5 vragen - 4 uren

1. De tekeningen die bij sommige vragen zijn opgenomen dienen enkel ter illustratie. De figuren zijn niet op schaal getekend. Probeer dus niet na te meten.
2. Handboeken en rekentoestellen zijn niet toegestaan. Het gebruik van een lat, een gradenboog, een geodriehoek en een passer is wel toegelaten.
3. Laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = {}^e\log 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (4 punten)

(a) (2 punten) Bepaal $k \in \mathbb{R}$, zodat voor elke complex getal $z = a + b\text{i}$ met $b = -2a$ geldt:

$$|z - k + 7\text{i}| = |z - 2 + 9\text{i}|$$

(b) (2 punten) $-\text{i}$ is een wortel van $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$. Zoek de andere wortels.

Vraag 2 (4 punten) Een patiënt neemt de eerste dag 10 mg van een geneesmiddel en daarna elke dag 5 mg. In de loop van de dag wordt in het lichaam 40% van het geneesmiddel afgebroken. We kunnen de hoeveelheden van het geneesmiddel die zich in het lichaam bevinden onmiddellijk na de inname op de 1ste, 2de, 3de, ... dag voorstellen door een rij $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

(a) (1 punt) Schrijf een recursief voorschrift voor deze rij.

(b) (1 punt) Bewijs door volledige inductie dat deze rij naar boven begrensd is.

(c) (1 punt) Bewijs dat de rij stijgend is.

(d) (1 punt) Bepaal de limiet van de rij door gebruik te maken van de rekenregels van limieten.

Vraag 3 (4 punten) Gegeven: $f(x) = x^3 + px - 1$.

(a) (2 punten) Aan welke voorwaarde moet $p \in \mathbb{R}$ voldoen opdat de functie geen extremum zou hebben?

(b) (2 punten) Aan welke voorwaarde moet $p \in \mathbb{R}$ voldoen opdat de functie een maximum en een minimum zou hebben en drie verschillende nulpunten? (Hint: wat is het teken van het product van de functiewaarden in het maximum en het minimum indien er drie verschillende nulpunten zijn?)

Vraag 4 (4 punten)

(a) (1 punt) Toon aan dat voor elk reëel getal x, de volgende gelijkheid geldt

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

(b) (1 punt) Bepaal met behulp van de vorige gelijkheid een primitieve van de functie f in $\mathbb{R}$, zodat

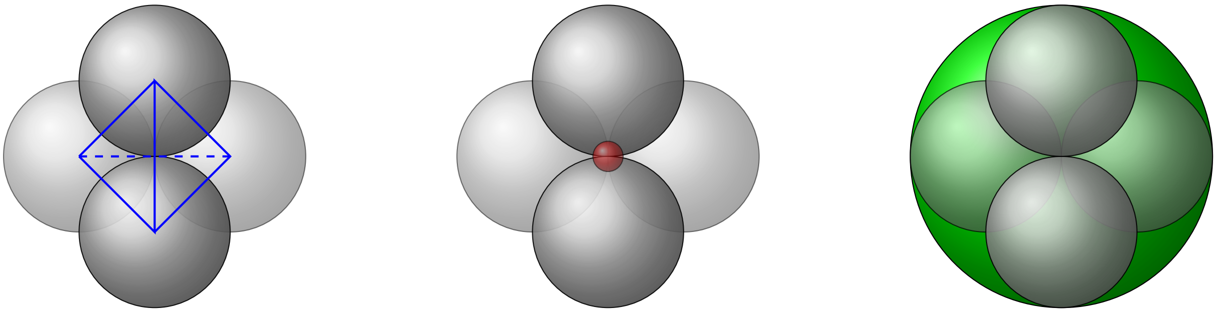
$$f(x) = \cos^3 x$$

(c) (1 punt) Gegeven a is een reëel getal verschillend van nul, bepaal de waarde van de bepaalde integraal door partiële integratie

$$I(a) = \int_0^a (2x+1)\cos^2 x \sin x \,\mathrm{d}x$$

(d) (1 punt) Bereken $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Vraag 5 (4 punten) 4 bollen met gelijke straal r worden gestapeld zodat de middelpunten samenvallen met de hoekpunten van een gelijkzijdige tetraëder met ribbe $2r$. Bepaal de verhouding van de volumes van de kleinste bol en de grootste bol die rakend zijn aan de 4 andere bollen.



(a) (1 punt) Bereken in de driehoek gevormd door de middelpunten van de 3 onderste bollen de afstand van het zwaartepunt tot een hoekpunt.

(b) (1 punt) In de tetraëder gevormd door de middelpunten van de 4 bollen bereken de afstand van het zwaartepunt (d.w.z. het punt dat zich op gelijke afstand bevindt van de 4 hoekpunten) tot een hoekpunt met behulp van vorig resultaat.

(c) (1 punt) Bereken het volume van de grootste bol (centrum gegeven in vorige vraag).

(d) (1 punt) Bereken het volume van de kleinste bol (zelfde centrum) en bereken de verhouding van beide volumes.