

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π , e , $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \dots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \dots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points)

- (a) (2 points) Déterminer $k \in \mathbb{R}$, de sorte que pour chaque nombre complexe $z = a + bi$ avec $b = -2a$ on ait :

$$|z - k + 7i| = |z - 2 + 9i|$$

- (b) (2 points) $-i$ est une racine de $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$. Trouver les autres racines.

Question 2 (4 points) Un patient prend 10 mg d'un médicament le premier jour et les jours suivants 5 mg. Au cours de la journée, 40 % de la substance est décomposée dans le corps. On peut représenter les quantités de médicaments qui se trouvent dans l'organisme immédiatement après la prise du 1er, 2ème, 3ème jour, ... par une suite u_1, u_2, u_3, \dots .

- (a) (1 point) Donner une formule récursive (par récurrence) pour cette suite.
- (b) (1 point) Prouver par induction complète (par récurrence) que cette suite est limitée vers le haut.
- (c) (1 point) Prouver que la suite est croissante.
- (d) (1 point) Déterminer la limite de la suite à l'aide des règles de calcul des limites.

Question 3 (4 points) Soit : $f(x) = x^3 + px - 1$.

- (a) (2 points) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction n'ait pas d'extremum ?
- (b) (2 points) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction ait un maximum et un minimum et trois zéros différents ? (Indice : quel est le signe du produit du maximum et du minimum s'il y a trois zéros différents ?)

Question 4 (4 points)

(a) (1 point) Démontrer que pour tout nombre réel x , on a la relation suivante

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x)$$

(b) (1 point) En déduire une primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} , telle que,

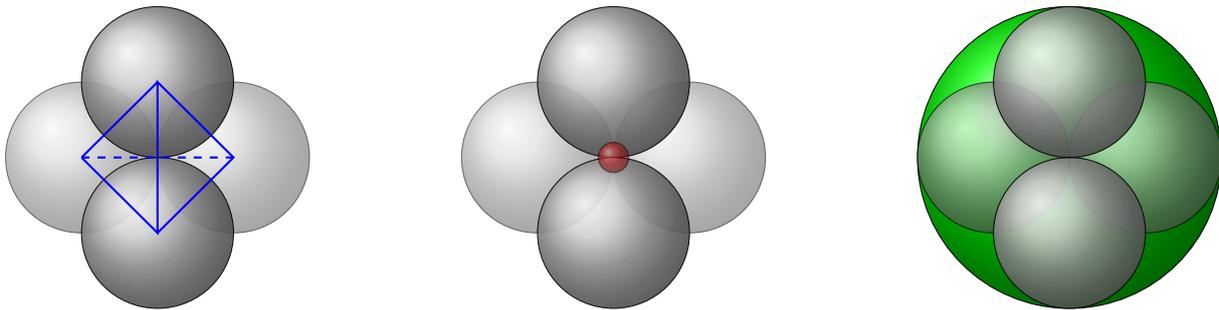
$$f(x) = \cos^3 x$$

(c) (1 point) a étant un nombre réel donné non nul, en déduire la valeur de l'intégrale définie en utilisant une intégration par parties

$$I(a) = \int_0^a (2x + 1) \cos^2 x \sin x \, dx$$

(d) (1 point) Calculer $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Question 5 (4 points) 4 sphères de même rayon r sont empilées de sorte que les points centraux coïncident avec les sommets d'un tétraèdre équilatéral avec arête $2r$. Déterminer le rapport des volumes de la plus petite sphère et de la plus grande sphère qui touchent les 4 autres sphères.



- (a) (1 point) Dans le triangle formé par les centres des 3 sphères inférieures, calculer la distance entre le centre de gravité et un sommet.
- (b) (1 point) Dans le tétraèdre formé par les centres des 4 sphères, calculer la distance du centre de gravité (l'isobarycentre, c.-à-d. le point qui se trouve à la même distance des 4 points) à un sommet en utilisant le résultat précédent.
- (c) (1 point) Calculer le volume de la plus grande sphère (centre donné dans la question précédente).
- (d) (1 point) Calculer le volume de la plus petite sphère (même centre) et calculer le rapport des deux volumes.