

Prüfung POL

2020 Analyse - Geometrie im Raum - Folgen und Reihen - Komplexe Zahlen Reihe A
5 Fragen - 4 Stunden

1. Die mit bestimmten Fragen verbundenen Figuren sind illustrativ und nicht maßstabsgerecht. Es ist sinnlos, sie zu messen.
2. Lehrbücher und Taschenrechner sind nicht erlaubt.
3. Lassen Sie in Ihren Antworten Zahlen wie π , e , $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \dots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \dots$ in ihrer symbolischen Form.

Frage 1 (4 Punkte)

- (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$, so dass wir für jede komplexe Zahl $z = a + bi$ mit $b = -2a$ haben:

$$|z - k + 7i| = |z - 2 + 9i|$$

- (b) (2 Punkte) $-i$ ist eine Wurzel aus $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$. Finde die anderen Wurzeln.

Frage 2 (4 Punkte) Ein Patient nimmt 10 mg eines Medikaments am ersten Tag und dann jeden Tag 5 mg. Tagsüber werden 40% der Medikamente im Körper abgebaut. Wir können die Mengen an Medikamenten, die sich unmittelbar nach der Einnahme des ersten, zweiten, dritten, ... Tages im Körper befinden, durch eine Reihe darstellen u_1, u_2, u_3, \dots .

- (a) (1 Punkt) Geben Sie eine rekursive Formel für diese Folge ein.
- (b) (1 Punkt) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass diese Folge nach oben begrenzt ist.
- (c) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass die Folge steigt.
- (d) (1 Punkt) Ermitteln Sie den Grenzwert der Folge mit Hilfe der Rechenregeln des Grenzwertes.

Frage 3 (4 Punkte) Gegeben: $f(x) = x^3 + px - 1$.

- (a) (2 Punkte) Welche Bedingung muss $p \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit die Funktion kein Extremum hat?
- (b) (2 Punkte) Welche Bedingung muss $p \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit die Funktion ein Maximum und ein Minimum und drei verschiedene Nullpunkte hat? (Hinweis: was ist das Vorzeichen des Produkts der Funktionswerte im Maximum und Minimum, wenn es drei verschiedene Nullpunkte gibt?)

Prüfung POL

2020 Analyse - Geometrie im Raum - Folgen und Reihen - Komplexe Zahlen Reihe A
5 Fragen - 4 Stunden

Frage 4 (4 Punkte)

(a) (1 Punkt) Demonstrieren Sie, dass für jede reelle Zahl x , wir die folgende Beziehung haben

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x)$$

(b) (1 Punkt) Leiten Sie eine Stammfunktion von der f -Funktion auf \mathbb{R} ab, so dass

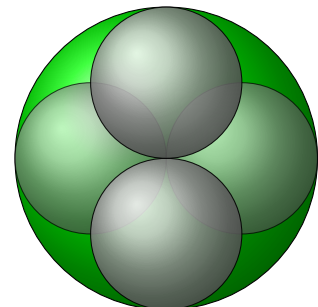
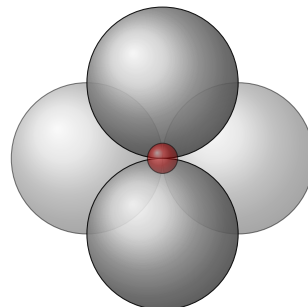
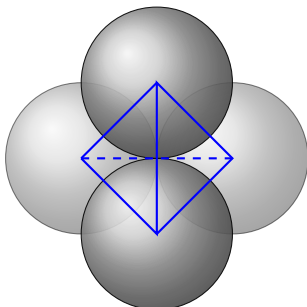
$$f(x) = \cos^3 x$$

(c) (1 Punkt) a ist eine gegebene reelle Zahl ungleich Null, leiten Sie den Wert des Integrals

$$I(a) = \int_0^a (2x + 1) \cos^2 x \sin x \, dx$$

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Frage 5 (4 Punkte) 4 Kugeln gleichen Radius r sind so gestapelt, dass die Mittelpunkte mit den Scheitelpunkten eines gleichseitigen Tetraeders mit Rippe $2r$ übereinstimmen. Bestimmen Sie das Verhältnis der Volumen der kleinsten Kugel und der größten Kugel, die die 4 anderen Kugeln berühren.



- (a) (1 Punkt) Berechnen Sie in dem Dreieck, das durch die Mittelpunkte der 3 unteren Kugeln gebildet wird, den Abstand vom Schwerpunkt zu einem Scheitelpunkt.
- (b) (1 Punkt) Berechnen Sie in dem Tetraeder, der durch die Mittelpunkte der 4 Kugeln gebildet wird, den Abstand vom Schwerpunkt (d.h. der Punkt, der gleich weit von den 4 Scheitelpunkten) zu einem Scheitelpunkt unter Verwendung vorigen Ergebnisses.
- (c) (1 Punkt) Berechnen Sie das Volumen der größten Kugel (Zentrum in der vorigen Frage angegeben).
- (d) (1 Punkt) Berechnen Sie das Volumen der kleinsten Kugel (gleiches Zentrum) und berechnen Sie das Verhältnis beider Volumina.