Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd
van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Meetkunde en Analytische Meetkunde

Bijkomende proef POL - 2020

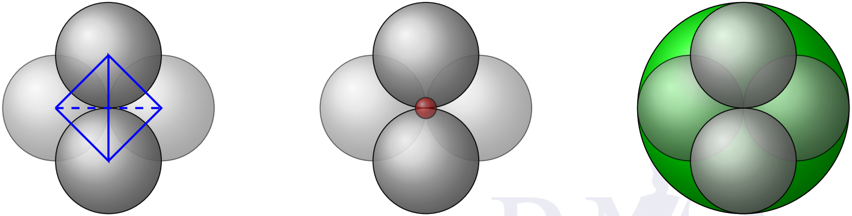
Oplossing van Vraag 5

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
- Algebra
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
  - Ruimtemeetkunde
  - Bol
  - Afstand, volume
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag (deel 1/2)

4 bollen met gelijke straal r worden gestapeld zodat de middelpunten samenvallen met de hoekpunten van een gelijkzijdige tetraëder met ribbe $2r$. Bepaal de verhouding van de volumes van de kleinste bol en de grootste bol die rakend zijn aan de 4 andere bollen.



Vraag (deel 2/2)

(a) (1 punt) Bereken in de driehoek gevormd door de middelpunten van de 3 onderste bollen de afstand van het zwaartepunt tot een hoekpunt.

▸ Hint ▸ Oplossing

(b) (1 punt) In de tetraëder gevormd door de middelpunten van de 4 bollen bereken de afstand van het zwaartepunt (d.w.z. het punt dat zich op gelijke afstand bevindt van de 4 hoekpunten) tot een hoekpunt met behulp van vorig resultaat.

▸ Hint ▸ Oplossing

(c) (1 punt) Bereken het volume van de grootste bol (centrum gegeven in vorige vraag).

▸ Oplossing

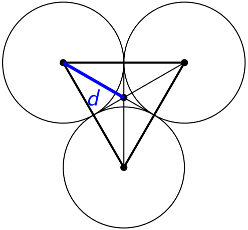
(d) (1 punt) Bereken het volume van de kleinste bol (zelfde centrum) en bereken de verhouding van beide volumes.

▸ Oplossing

Hint voor deelvraag (a)

Terug naar de vraag

- Gebruik een hulpdriehoek

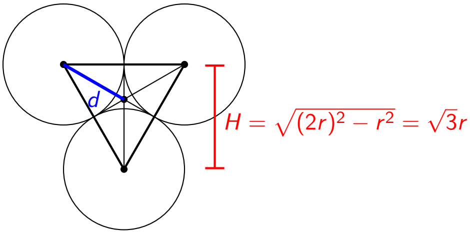


- Beschouw de gelijkvormigheid van twee driehoeken.

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

Het middelpunt van de te bepalen bollen bevindt zich om symmetrieredenen evenver van alle hoekpunten van de tetraëder. Om dit middelpunt te bepalen zullen we 2 hulpdriehoeken gebruiken



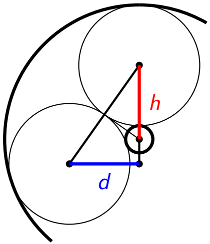
De eerste is een gelijkzijdige driehoek die de middelpunten van 3 bollen als hoekpunten heeft en als zijde $2r$. We kunnen de afstand d van een hoekpunt tot het middelpunt bepalen door de gelijkvormigheid van de driehoeken te beschouwen:

$$\frac{r}{d} = \frac{H}{2r} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2r^2}{H} = \frac{2}{\sqrt{3}}r.$$

Hint voor deelvraag (b)

Terug naar de vraag

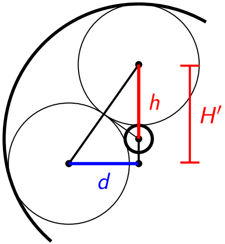
- Gebruik een hulpdriehoek



- Beschouw de gelijkvormigheid van twee driehoeken.

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag



De tweede is een rechthoekige driehoek met als schuine zijde $2r$ en d als een andere zijde. Het middelpunt bevindt zich evenver van de hoekpunten van de schuine zijde. De afstand tot de top van de tetraëder kan dan bepaald worden door de gelijkvormigheid van de driehoeken te beschouwen:

$$\frac{H'}{2r} = \frac{r}{h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2r^2}{H'} = \frac{2r^2}{\sqrt{(2r)^2 - d^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}r.$$

Oplossing van deelvraag (c)

Terug naar de vraag

De straal van de grote bol is dan:

$$R_B = h + r = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right) r$$

en het volume van de grootste bol is gegeven door

$$V_B = \frac{4}{3}\pi R_B^3.$$

Oplossing van deelvraag (d)

Terug naar de vraag

De straal van de klein bol is dan:

$$R_b = h - r = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) r$$

en het volume van de kleinste bol is gegeven door $V_b = \frac{4}{3}\pi R_b^3$.
De verhouding van hun volumes bedraagt:

$$\begin{aligned}\frac{V_b}{V_B} &= \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{3}{2}} + 1}\right)^3 \\ &= \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^3 \\ &= 485 - 198\sqrt{6}.\end{aligned}$$