Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Géométrie

Epreuve complémentaire POL - 2020

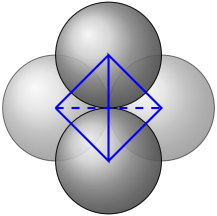
Solution de la Question 5

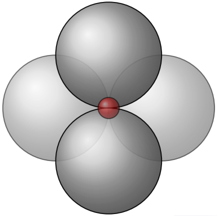
Position de la question dans le plan des matières

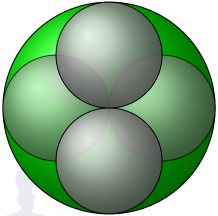
- Analyse
- Algèbre
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
    - Géométrie dans l'espace
    - Sphère
    - Distance, volume
- Probabilités et Statistique

Question (partie 1/2)

4 sphères de même rayon r sont empilées de sorte que les points centraux coïncident avec les sommets d'un tétraèdre équilatéral avec arête $2r$. Déterminer le rapport des volumes de la plus petite sphère et de la plus grande sphère qui touchent les 4 autres sphères.







Question (partie 2/2)

(a) (1 point) Dans le triangle formé par les centres des 3 sphères inférieures, calculer la distance entre le centre de gravité et un sommet.

Indication Solution

(b) (1 point) Dans le tétraèdre formé par les centres des 4 sphères, calculer la distance du centre de gravité (l'isobarycentre, c.-à-d. le point qui se trouve à la même distance des 4 points) à un sommet en utilisant le résultat précédent.

Indication Solution

(c) (1 point) Calculer le volume de la plus grande sphère (centre donné dans la question précédente).

Solution

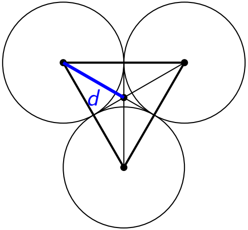
(d) (1 point) Calculer le volume de la plus petite sphère (même centre) et calculer le rapport des deux volumes.

Solution

Indication pour la sous-question (a)

◂ Retour à la question

- Utiliser un triangle auxiliaire

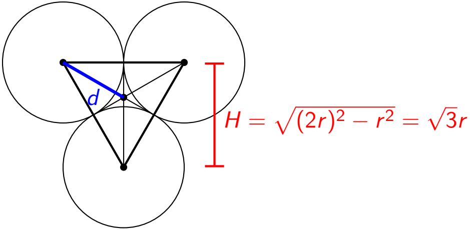


- Considérer la similarité de deux triangles.

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

Le centre des sphères à déterminer est, pour des raisons de symétrie, équidistant de tous les sommets du tétraèdre. Pour déterminer ce centre, nous allons utiliser 2 triangles auxiliaires.



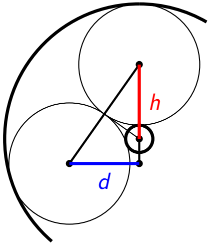
Le premier est un triangle équilatéral dont les sommets sont les centres de trois sphères et dont le côté est de $2r$. Nous pouvons déterminer la distance d d'un sommet au centre en considérant la similitude des triangles :

$$\frac{r}{d} = \frac{H}{2r} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2r^2}{H} = \frac{2}{\sqrt{3}}r.$$

Indication pour la sous-question (b)

Retour à la question

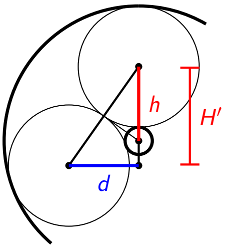
- Utiliser un triangle auxiliaire



- Considérer la similarité de deux triangles.

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question



Le second est un triangle rectangle avec $2r$ comme hypoténuse et d comme autre côté. Le point central est équidistant des sommets de l'hypoténuse. La distance au sommet du tétraèdre peut alors être déterminée en considérant la similitude des triangles :

$$\frac{H'}{2r} = \frac{r}{h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2r^2}{H'} = \frac{2r^2}{\sqrt{(2r)^2 - d^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}r.$$

Solution de la sous-question (c)

Retour à la question

Le rayon de la grande sphère est alors :

$$R_B = h + r = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right) r$$

et le volume de la grande sphère est donné par

$$V_B = \frac{4}{3}\pi R_B^3.$$

Solution de la sous-question (d)

Retour à la question

Le rayon de la petite sphère est alors :

$$R_b = h - r = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) r$$

et le volume de la petite sphère est donné par $V_b = \frac{4}{3}\pi R_b^3$.
Le rapport de leurs volumes est :

$$\frac{V_b}{V_B} = \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{3}{2}} + 1}\right)^3$$
$$= \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^3$$
$$= 485 - 198\sqrt{6}.$$