

Vorbereiding op de Toelatingswedstrijd
van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Trigonometrie

Bijkomende proef POL - 2020
Oplossing van Vraag 4

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- ▶ Analyse
 - Integralen
- ▶ Algebra
- ▶ Trigonometrie
 - Gebruikelijke formules
 - Goniometrische functies
- ▶ Meetkunde en Analytische Meetkunde
- ▶ Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag

- (a) (1 punt) Toon aan dat voor elk reëel getal x , de volgende gelijkheid geldt

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x).$$

▶ Hint

▶ Oplossing

- (b) (1 punt) Bepaal met behulp van de vorige gelijkheid een primitieve van de functie f in \mathbb{R} , zodat

$$f(x) = \cos^3 x.$$

▶ Oplossing

- (c) (1 punt) Gegeven a is een reëel getal verschillend van nul, bepaal de waarde van de bepaalde integraal door partiële integratie

$$I(a) = \int_0^a (2x + 1) \cos^2 x \sin x \, dx.$$

▶ Oplossing

- (d) (1 punt) Bereken $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$

▶ Oplossing

Hint voor deelvraag (a)

← [Terug naar de vraag](#)

Pas de formules voor de (co)sinus van de som van 2 hoeken toe.

We passen de formules voor de (co)sinus van de som van 2 hoeken toe:

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x).$$

De integratie kan rechtstreeks gebeuren:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \, dx &= \int \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin 3x + 3 \sin x \right) + C, \quad (C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Door partiële integratie bekomen we de vorige integraal:

$$\begin{aligned}\int (2x + 1) \cos^2 x \sin x \, dx &= -\frac{1}{3} (2x + 1) \cos^3 x + \int \frac{2}{3} \cos^3 x \, dx \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \sin 3x + 3 \sin x \right) \\ &\quad - \frac{1}{3} (2x + 1) \cos^3 x + C.\end{aligned}$$

Integreren tussen 0 en a geeft:

$$I(a) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \sin 3a + 3 \sin a \right) - \frac{1}{3} (2a + 1) \cos^3 a + \frac{1}{3}.$$

Vul de waarde $\frac{\pi}{3}$ voor a in:

$$I\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{18\sqrt{3} + 21 - 2\pi}{72}.$$