Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Trigonométrie

Epreuve complémentaire POL - 2020

Solution de la Question 4

RMA .be Brussels Royal Military Academy

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
  - Intégrales
- Algèbre
- Trigonométrie
  - Formules usuelles
  - Fonctions trigonométriques de référence
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique

RMA .be Brussels Royal Military Academy

Question

(a) (1 point) Démontrer que pour tout nombre réel x, on a la relation suivante

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right).$$

▸ Indication ▸ Solution

(b) (1 point) En déduire une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que,

$$f(x) = \cos^3 x.$$

▸ Solution

(c) (1 point) a étant un nombre réel donné non nul, en déduire la valeur de l'intégrale définie en utilisant une intégration par parties

$$I(a) = \int_0^a (2x+1)\cos^2 x \sin x \, dx.$$

▸ Solution

(d) (1 point) Calculer $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

▸ Solution

RMA .be Brussels
Royal Military Academy

Indication pour la sous-question (a)

Retour à la question

Appliquer la formule pour le (co)sinus de la somme de deux angles.

Brussels
Royal Military Academy

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

On applique la formule pour le (co)sinus de la somme de deux angles :

$$\begin{aligned}
\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
&= \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x \\
&= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \\
&= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x \\
&= 4 \cos^3 x - 3 \cos x
\end{aligned}$$

d'où on tire que

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} \left(\cos 3x + 3 \cos x\right).$$

RMA Brussels Royal Military Academy

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

L'intégration est directe :

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \frac{1}{4} (\cos 3x + 3\cos x) \, dx$$
$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin 3x + 3 \sin x \right) + C, \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

RMA .be Brussels
Royal Military Academy

Solution de la sous-question (c)

Retour à la question

Par intégration par parties, on retrouve l'intégrale précédente :

$$\begin{aligned}\int (2x+1)\cos^2 x \sin x \, dx &= -\frac{1}{3}(2x+1)\cos^3 x + \int \frac{2}{3}\cos^3 x \, dx \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right) \\ &\qquad - \frac{1}{3}(2x+1)\cos^3 x + C.\end{aligned}$$

Intégrer entre 0 et a donne :

$$I(a) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\sin 3a + 3\sin a\right) - \frac{1}{3}(2a+1)\cos^3 a + \frac{1}{3}.$$

RMA .be Brussels Royal Military Academy

Solution de la sous-question (d)

Retour à la question

On remplace a par $\frac{\pi}{3}$:

$$I\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{18\sqrt{3} + 21 - 2\pi}{72}.$$

RMA .be Brussels
Royal Military Academy