

Vorbereiding op de Toelatingswedstrijd
van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Analyse

Bijkomende proef POL - 2020
Oplossing van Vraag 3

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- ▶ Analyse
 - Functie
 - Extrema
- ▶ Algebra
- ▶ Trigonometrie
- ▶ Meetkunde en Analytische Meetkunde
- ▶ Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag

(a) (2 punten) Aan welke voorwaarde moet $p \in \mathbb{R}$ voldoen opdat de functie geen extremum zou hebben?

► Oplossing

(b) (2 punten) Aan welke voorwaarde moet $p \in \mathbb{R}$ voldoen opdat de functie een maximum en een minimum zou hebben en drie verschillende nulpunten? (Hint: wat is het teken van het product van de functiewaarden in het maximum en het minimum indien er drie verschillende nulpunten zijn?)

► Oplossing

Geen extrema wil zeggen dat de eerste afgeleide geen nulpunten heeft of dat voor een nulpunt van de eerste afgeleide, de tweede afgeleide eveneens 0 is en de derde afgeleide verschillend van 0 is. De afgeleide van de functie is

$$f'(x) = 3x^2 + p.$$

Er zijn geen reële nulpunten indien $p > 0$.

Voor $p = 0$ dienen we de tweede en de derde afgeleiden te bepalen:

$$f''(x) = 6x$$

$$f^{(3)}(x) = 6$$

Dit betekent dat voor $p \geq 0$ er geen extrema zijn.

Oplossing van deelvraag (b)

← Terug naar de vraag

Het product van de functiewaarden in het maximum en het minimum moet negatief zijn, het lokale maximum moet zich boven de x-as bevinden en het lokale minimum eronder:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{-p}{3}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{-p}{3}} \end{cases}$$

We vullen beide extrema in het functievoorschrift in:

$$\begin{cases} f(x_1) = \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} + p \frac{(-p)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} - 1 \\ f(x_2) = -\frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} - p \frac{(-p)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} - 1 \end{cases}$$

Het product van beide na vereenvoudiging moet kleiner zijn dan 0:

$$\left(\frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} - \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} - 1 \right) \left(-\frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} + \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} - 1 \right) < 0$$

$$\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) < 0$$

$$1 - \frac{4}{27}(-p)^3 < 0$$

$$p < -\frac{3}{4^{\frac{1}{3}}}$$