

Préparation au Concours d'Admission
de la Faculté Polytechnique
Ecole Royale Militaire

Analyse

Epreuve complémentaire POL - 2020
Solution de la Question 3

Position de la question dans le plan des matières

- ▶ Analyse
 - Fonction
 - Extrema
- ▶ Algèbre
- ▶ Trigonométrie
- ▶ Géométrie et Géométrie Analytique
- ▶ Probabilités et Statistique

Question

(a) (2 points) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction n'ait pas d'extremum ?

► Solution

(b) (2 points) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction ait un maximum et un minimum et trois zéros différents? (Indice: quel est le signe du produit du maximum et du minimum s'il y a trois zéros différents?)

► Solution

L'absence d'extrema signifie que la dérivée première n'a pas de zéro ou que pour un zéro de la dérivée première, la dérivée seconde est également égale à 0 et la troisième dérivée est différente de 0. La dérivée de la fonction est

$$f'(x) = 3x^2 + p.$$

Il n'y a pas de zéros si $p > 0$.

Pour $p = 0$ on doit déterminer la dérivée seconde et la troisième dérivée :

$$f''(x) = 6x$$

$$f^{(3)}(x) = 6$$

Cela signifie que pour $p \geq 0$, il n'y a pas d'extrema.

Solution de la sous-question (b)

[← Retour à la question](#)

Le produit des valeurs de la fonction au maximum et au minimum doit être négatif, le maximum local doit être au-dessus de l'axe des x et le minimum local en dessous :

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{-p}{3}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{-p}{3}} \end{cases}$$

On introduit les deux extrema dans l'expression de la fonction :

$$\begin{cases} f(x_1) = \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} + p \frac{(-p)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} - 1 \\ f(x_2) = -\frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} - p \frac{(-p)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} - 1 \end{cases}$$

Le produit des deux doit être inférieur à 0 :

$$\left(\frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} - \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} - 1 \right) \left(-\frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} + \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} - 1 \right) < 0$$

$$\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) < 0$$

$$1 - \frac{4}{27}(-p)^3 < 0$$

$$p < -\frac{3}{4^{\frac{1}{3}}}$$