Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Analyse

Bijkomende proef POL - 2020

Oplossing van Vraag 2

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
    - Rijen
    - Limieten
- Algebra
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag

Een patiënt neemt de eerste dag 10 mg van een geneesmiddel en daarna elke dag 5 mg. In de loop van de dag wordt in het lichaam 40% van het geneesmiddel afgebroken. We kunnen de hoeveelheden van het geneesmiddel die zich in het lichaam bevinden onmiddellijk na de inname op de 1ste, 2de, 3de, ... dag voorstellen door een rij $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

(a) (1 punt) Schrijf een recursief voorschrift voor deze rij.

Oplossing

(b) (1 punt) Bewijs door volledige inductie dat deze rij naar boven begrensd is.

Hint Oplossing

(c) (1 punt) Bewijs dat de rij stijgend is.

Hint Oplossing

(d) (1 punt) Bepaal de limiet van de rij door gebruik te maken van de rekenregels van limieten.

Oplossing

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

$$\begin{cases} u_1 & = 10 \\ u_n & = \frac{3}{5} u_{n-1} + 5 \quad \text{voor } n > 1 \end{cases}$$

Hint voor deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Gebruik het vaste punt $u = \frac{25}{2}$ als bovengrens.

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Er is een vast punt $u = \frac{25}{2}$ bekomen als oplossing van de vergelijking

$$u = \frac{3}{5}u + 5.$$

We weten dat $u_1 \leq \frac{25}{2}$. Stel nu dat $u_{n-1} \leq \frac{25}{2}$ dan geldt er voor u_n:

$$u_n = \frac{3}{5}u_{n-1} + 5 \leq \frac{3}{5}\frac{25}{2} + 5 = \frac{25}{2}.$$

Dit betekent dat $\frac{25}{2}$ een bovengrens is.

Hint voor deelvraag (c)

Terug naar de vraag

Toon aan dat $u_n - u_{n-1} \geq 0$.

Oplossing van deelvraag (c)

Terug naar de vraag

We tonen aan dat $u_{n_1} \leq u_n$ of $u_n - u_{n-1} \geq 0$:

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{2}{5}u_{n-1} + 5 \geq 0.$$

Dit geldt wanneer $u_{n-1} \leq \frac{25}{2}$. Wat inderdaad voldaan is daar $\frac{25}{2}$ een bovengrens is.

Oplossing van deelvraag (d)

Terug naar de vraag

De rij kan expliciet uitgedrukt worden als volgt:

$$
\begin{aligned}
u_n &= 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} + \cdots + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{1} + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{0} \\
&= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 5\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{3}{5}\right)^{1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{0}\right) \\
&= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 5\frac{1^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}} \\
&= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{25}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)
\end{aligned}
$$

We bepalen nu de limiet voor $n \to \infty$:

$$
\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{25}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = \frac{25}{2}
$$