Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Analyse

Epreuve complémentaire POL - 2020
Solution de la Question 2

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
  - Suites
  - Limites
- Algèbre
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique

Question

Un patient prend 10 mg d'un médicament le premier jour et les jours suivants 5 mg. Au cours de la journée, 40 % de la substance est décomposée dans le corps. On peut représenter les quantités de médicaments qui se trouvent dans l'organisme immédiatement après la prise du 1er, 2ème, 3ème jour, ... par une suite $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

(a) (1 point) Donner une formule récursive (par récurrence) pour cette suite.

▸ Solution

(b) (1 point) Prouver par induction complète (par récurrence) que cette suite est limitée vers le haut.

▸ Indication ▸ Solution

(c) (1 point) Prouver que la suite est croissante.

▸ Indication ▸ Solution

(d) (1 point) Déterminer la limite de la suite à l'aide des règles de calcul des limites.

▸ Solution

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

$$\begin{cases} u_1 & = 10 \\ u_n & = \frac{3}{5} u_{n-1} + 5 \quad \text{pour } n > 1 \end{cases}$$

Indication pour la sous-question (b)

Retour à la question

Utiliser le point fixe $u = \frac{25}{2}$ comme borne supérieure.

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

Il y a un point fixe $u = \frac{25}{2}$ obtenu comme solution de l'équation

$$u = \frac{3}{5}u + 5.$$

On sait que $u_1 \leq \frac{25}{2}$. Supposons maintenant que $u_{n-1} \leq \frac{25}{2}$, alors pour u_n on a :

$$u_n = \frac{3}{5}u_{n-1} + 5 \leq \frac{3}{5}\frac{25}{2} + 5 = \frac{25}{2}.$$

Cela signifie que $\frac{25}{2}$ est une borne supérieure.

Indication pour la sous-question (c)

Retour à la question

Montrer que $u_n - u_{n-1} \geq 0$.

Solution de la sous-question (c)

Retour à la question

On montre que $u_{n_1} \leq u_n$ ou de façon équivalente que $u_n - u_{n-1} \geq 0$:

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{2}{5}u_{n-1} + 5 \geq 0.$$

C'est vrai lorsque $u_{n-1} \leq \frac{25}{2}$, ce qui est avéré vu que $\frac{25}{2}$ est une borne supérieure.

Solution de la sous-question (d)

Retour à la question

La suite peut être écrite de façon explicite comme suit :

$$
\begin{aligned}
u_n &= 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} + \cdots + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{1} + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{0} \\
&= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 5\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{3}{5}\right)^{1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{0}\right) \\
&= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 5\,\frac{1^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{5}} \\
&= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{25}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)
\end{aligned}
$$

On détermine ensuite la limite pour $n \to \infty$:

$$
\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{25}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = \frac{25}{2}
$$